Flash BAC

nouveaux programmes

La PHYSIQUE au baccalauréat D

RÉSUMÉS DE COURS
EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS

sous la direction de Michel THELLIEZ

ARMAND COLIN

La PHYSIQUE au baccalauréat D

sous la direction de Michel THELLIEZ

professeur à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Gérard AUSSEL, Thierry GAULIER,
Françoise GERMAIN, Alain PAILLER

professeurs de sciences physiques

nouveaux programmes

ARMAND COLIN

103, bd Saint-Michel, 75005 Paris

TABLE DES MATIÈRES

1	Mouvement d'un point matériel. Vitesse. Accélération	3
2	Application aux mouvements rectilignes	13
3	Mouvements circulaires	21
4	Mouvement du centre d'inertie. Relation fondamentale de la dynamique	27
5	Mouvements dans un champ de pesanteur uniforme	40
6	Interaction gravitationnelle	51
7	Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme	64
8	Condensateur plan. Capacité	72
9	Produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$	79
10	Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme. Force de Lorentz $\vec{F} = q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$	82
11	Les courants, sources de champ magnétique.	95
12	Action d'un champ magnétique sur un courant. Loi de Laplace. Torsion d'un cadre	104
13	Induction électromagnétique. Force électromotrice induite	114
14	Auto-induction	132
15	Oscillateur mécanique à une dimension	136
16	Oscillations libres d'un circuit électrique	148
17	Oscillations forcées en régime sinusoïdal d'un circuit RLC série	157
18	La résonance pour un circuit RLC série	174
19	Puissance	184
20	Oscillations forcées. Résonance mécanique.	194
21	Aspect corpusculaire de la lumière. Efet photoélectrique	201
22	Niveaux d'énergie d'un atome	211
23	Noyau atomique. Détection de particules	221
24	Réactions nucléaires	231

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

© Armand Colin Editeur, Paris, 1984.

ISBN 2-200-07632-0

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL VITESSE. ACCÉLÉRATION

1

MOUVEMENT ET POSITION

1. Le mouvement. (On se limitera au cas des mouvements plans)

Le mouvement est un phénomène qui met en jeu simultanément les notions d'espace et de temps. Un mobile ponctuel occupe, à chaque instant, une position bien définie par les coordonnées du point où il se trouve dans un repère convenablement choisi. Le mobile est en mouvement si les coordonnées de sa position sont des fonctions du temps. La description d'un mouvement dépend donc essentiellement du repère choisi.

2. Position du mobile

Elle est donnée à chaque instant par les coordonnées cartésiennes du point où se trouve le mobile **(fig. 1).**

$$\overrightarrow{OM} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j}$$

avec $X = f(t)$ et $Y = g(t)$.

Elle peut être aussi donnée par la connaissance de l'abscisse curviligne

$$s = \overset{\frown}{OM} = s(t)$$

sur la trajectoire supposée connue.

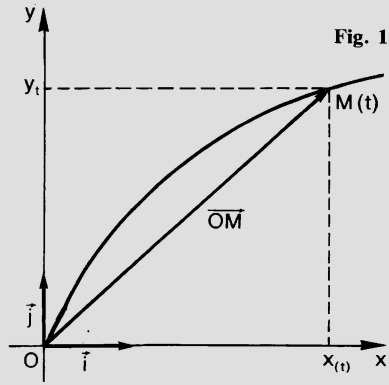


Fig. 1

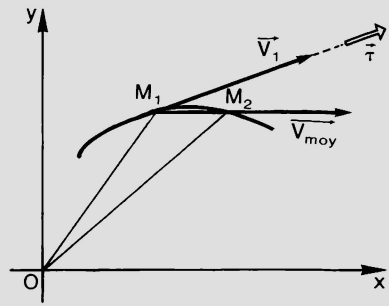


Fig. 2

VITESSE ET ACCÉLÉRATION

1. Le vecteur vitesse **(fig. 2)**

Soit M un point mobile sur la trajectoire :
à l'instant t_1 il est au point M_1 défini par $\overrightarrow{OM}_1$;
à l'instant t_2 il est au point M_2 défini par $\overrightarrow{OM}_2$.
Le déplacement du mobile pendant la durée $(t_2 - t_1)$ est le vecteur :

$$\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}.$$

Le vecteur vitesse moyenne, entre ces deux dates, est le vecteur :

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1}$$

ce vecteur est porté par $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Le vecteur vitesse instantanée en M_1 est la limite du vecteur vitesse moyenne quand l'intervalle de temps $(t_2 - t_1)$ tend vers 0 :

$$\vec{V}_1 = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1},$$

qui se note $\left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{t_1}$.

Les composantes du vecteur vitesse, dans le repère précédent, sont : $V_x = \dot{X}$ et $V_y = \dot{Y}$ avec $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$ et $\dot{Y} = \frac{dY}{dt}$, dérivées par rapport au temps des équations horaires. On a :

$$\vec{V} = \dot{X} \cdot \vec{i} + \dot{Y} \cdot \vec{j} \quad \text{avec} \quad v = \| \vec{V} \| = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}.$$

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire et est orienté dans le sens du mouvement. La vitesse s'exprime en $m \cdot s^{-1}$.

Sur la trajectoire (C), *repérée à partir d'un point origine* M_0, un point d'abscisse $s = \widehat{M_0M}$ a une vitesse $\vec{V}$ définie par la relation $\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$: $\vec{\tau}$, vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire au point M.

2. *Le vecteur accélération* (fig. 3).

Le mobile passe au point M_0 à la date t_0, avec la vitesse $\vec{V}_0$; à la date t_1, il passe au point M_1, avec la vitesse $\vec{V}_1$; par définition : *le vecteur accélération* à la date t_0 est :

$$\vec{A}_0 = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\vec{V}_1 - \vec{V}_0}{t_1 - t_0}$$

qui se note $\left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{t_0}$.

Les composantes du vecteur accélération dans le repère précédent sont : $A_x = \dot{V}_x = \ddot{X}$ et $A_y = \dot{V}_y = \ddot{Y}$, dérivées secondes par rapport au temps des équations horaires. On a :

$$\vec{A} = \ddot{X} \cdot \vec{i} + \ddot{Y} \cdot \vec{j}$$

avec $A = \| \vec{A} \| = \sqrt{\ddot{X}^2 + \ddot{Y}^2}$.

L'accélération s'exprime en $m \cdot s^{-2}$.

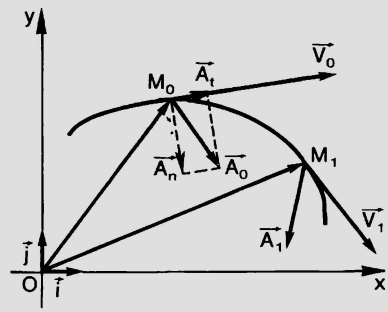


Fig. 3

Sur la trajectoire (C) repérée à partir d'un point origine M_0, un point d'abscisse $s = \widehat{M_0M}$ a une accélération $\vec{A}$ définies par ses composantes :

— **composante tangentielle :** $A_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$

— **composante normale :** $A_n = \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{v^2}{R}$.

R est le rayon de courbure de la trajectoire, caractéristique géométrique de la courbe (pour un cercle, c'est le rayon du cercle). On a :

$$\vec{A} = A_\tau \cdot \vec{\tau} + A_n \cdot \vec{n}.$$

L'accélération est toujours orientée vers la concavité de la trajectoire.

3. Remarque. Les formules intrinsèques donnant la vitesse et l'accélération restent valables pour un mouvement à trois dimensions; dans ce cas cependant, il existe une infinité de normales (situées dans le plan normal) : l'accélération normale est portée par une direction particulière appelée *normale principale.*

EXERCICES

1. Un mobile décrit une trajectoire non rectiligne, avec une vitesse $\vec{V}$, de mesure $v = C^{te}$. L'accélération peut-elle être nulle? En quels points particuliers de la trajectoire ceci peut-il se réaliser?

Réponse : dans le cas le plus général le changement de direction du vecteur vitesse correspond à une accélération normale $A_n = \frac{v^2}{R}$. Cette accélération est toujours dirigée vers la concavité de la trajectoire. L'accélération peut s'annuler en un point où la courbure de la trajectoire change de sens.

2. Un satellite géostationnaire apparaît immobile à un observateur situé à la surface du sol. Dans quel repère son mouvement est-il circulaire uniforme?

Réponse : le satellite décrit une trajectoire circulaire d'un mouvement uniforme dans le repère ou un point de la surface du globe terrestre a un mouvement identique. Cette trajectoire se trouve donc dans le plan de l'équateur. L'origine du repère est donc au centre d'inertie de la Terre le mouvement du satellite est repéré par rapport à deux axes fixes contenus dans ce plan.

3. Dans un mouvement le vecteur vitesse $\vec{V}$ du mobile et son vecteur accélération $\vec{A}$ sont toujours perpendiculaires. Quelles conséquences cela entraîne-t-il pour la mesure de la vitesse? Citez un mouvement qui présente cette particularité.

Réponses : s'il n'y a pas de composantes tangentielles du vecteur accélération le vecteur vitesse a une norme constante. Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, le vecteur accélération est porté par la normale et dirigé vers le centre de courbure. Ceci est réalisé dans le mouvement circulaire uniforme.

4. Un mobile décrit dans un plan une trajectoire curviligne. La projection du mouvement sur un axe XX′ peut-elle correspondre à un mouvement rectiligne uniforme? Donnez un exemple de mouvement ayant cette particularité.

Réponses : oui, cela est possible si le vecteur accélération a une direction constante : sa projection sur un axe perpendiculaire à cette direction est toujours nulle donc sur cet axe la projection du mouvement est rectiligne uniforme. Le mouvement parabolique peut présenter cette particularité.

5. Un mouvement est caractérisé par la donnée du vecteur vitesse et du vecteur accélération à un instant t : que peut-on en déduire quant à la trajectoire du mobile postérieurement à cet instant dans les cas suivants :

1° La vitesse est nulle : l'accélération est un vecteur constant?

2° La vitesse est un vecteur constant l'accélération est nulle?

3° Le vecteur vitesse et le vecteur accélération ont une mesure constante et sont perpendiculaires?

4° Le vecteur accélération est constant et fait un angle avec le vecteur vitesse?

5° Le vecteur vitesse et le vecteur accélération sont nuls?

Réponses :

1° Le mouvement sera rectiligne, le vecteur accélération donne la direction et le sens du mouvement.

2° Le mouvement est rectiligne uniforme dans la direction et le sens du vecteur vitesse.

3° Le mouvement est circulaire uniforme, la courbure de la trajectoire est dans le sens du vecteur accélération.

4° La trajectoire est curviligne : c'est une parabole d'axe ayant pour direction le vecteur accélération, sa concavité étant dirigée dans le sens du vecteur accélération.

5° Dans ce repère le mobile est au repos et y restera.

6. Un mobile décrit une trajectoire parabolique à vitesse constante $V = C^{te}$; son abscisse curviligne $s = \overset{\frown}{OM}$ est donnée par la relation : $s = V \cdot t$. Peut-il exister un axe du plan contenant la trajectoire sur lequel la projection du mouvement soit un mouvement rectiligne uniforme?

Réponse : le vecteur vitesse est à chaque instant tangent à la trajectoire : son changement d'orientation correspond à une accélération normale dont l'orientation va changer en chaque point de la trajectoire puisque le vecteur accélération reste perpendiculaire au vecteur vitesse; il est donc impossible de trouver un axe sur lequel la projection du vecteur accélération soit constamment nulle, ce qui devrait caractériser un mouvement uniforme.

PROBLÈMES

1. Quelle est l'équation de la trajectoire d'un mouvement plan dont les lois horaires relatives aux axes $x'x$ et $y'y$ sont :

$$x = -t^2 - 2t + 4 \text{ et } y = t^2 + 2t + 4 \qquad x, y, \text{ en m et } t \text{ en s?}$$

Préciser aux dates $t = 0$ s, $t = 1$ s et $t = 2$ s la position du mobile, sa vitesse et son accélération.

2. Un mobile se déplace dans un plan, son mouvement est étudié par projection sur deux axes OX et OY perpendiculaires sur lesquels les vecteurs unitaires sont respectivement $\vec{i}$ et $\vec{j}$. La position du mobile à un instant t est donnée par :

$$\overrightarrow{OM} = (5 \cdot t)\,\vec{i} + (-5 \cdot t^2 + 5 \cdot t)\,\vec{j}.$$

Quelle est la position du mobile aux dates $t=0$ s; $t=1$ s et $t=2$ s?
Quelle est l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile dans ce plan? Tracer son graphe.
Quelles sont la vitesse et l'accélération du mobile à la date t = 1 s?

3. On considère la demi-parabole d'équation $y=x^2$ avec $x>0$. Un mobile part du point $X_0=0$, $Y_0=0$ à la date $t_0=0$. Sa position en fonction du temps est donnée par les lois horaires : $x=t$ et $y=t^2$.
Quelle est la position et la vitesse du mobile aux dates $t=0$ s; $t=1$ s; $t=2$ s; $t=3$ s?
Quelle est l'accélération du mobile?
Que deviendrait la trajectoire du mobile si à $t=2$ s l'accélération devient nulle?

4. Un point M a ses coordonnées définies en fonction du temps dans un repère fixe orthonormé par les lois horaires $Y=5\cdot t$ et $X=3\cdot t^2+4$, $t>0$.
1° Écrire l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile dans ce repère. Tracer la courbe représentative de la trajectoire pour $0<t<4$ s.
2° Quelle est la vitesse du mobile aux dates $t=0$ s; $t=1$ s; $t=2$ s; et $t=3$ s.
3° Quelle est à un instant t quelconque l'accélération du mouvement?
4° Vérifier que le vecteur vitesse à la date $t=2$ s est un vecteur directeur de la tangente à la trajectoire en A point où se trouve le mobile à $t=2$ s.

5. Les coordonnées d'un mobile M dans le plan $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ sont données à chaque instant t par les relations :

$$\overrightarrow{OM} \quad \begin{cases} x=2-t \\ y=t^2-2t+1 \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x, y, z \text{ en mètres} \\ t \text{ en secondes.} \end{matrix}$$

Trouver l'équation cartésienne de la trajectoire (C) et la représenter graphiquement.
Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}$ et le vecteur accélération $\vec{A}$, les représenter graphiquement aux instants $t=1$ s, $t=2$ s et $t=3$ s.
Déterminer le rayon de courbure à l'instant $t=1$ s.

SOLUTIONS

1. $\overrightarrow{OM} \quad \begin{cases} x=-t^2-2t+4 \\ y=\ t^2+2t+4 \end{cases}$

L'équation de la trajectoire est une relation indépendante du temps entre les coordonnées, soit ici :

$$x+y=8.$$

La trajectoire est donc une droite d'équation $y=-x+8$.

$$\vec{V} \quad \begin{cases} v_x=\dfrac{dx}{dt}=-(2t+2) \\ v_y=\dfrac{dy}{dt}=2t+2 \end{cases} \qquad \text{Remarque : } v_x=-v_y$$

$$v=\|\vec{V}\|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=|v_x|\cdot\sqrt{2}.$$

La vitesse $v = (2t+2)\sqrt{2}$ ⇒ L'accélération $a = 2\sqrt{2}$.

$$t_0 = 0 \begin{cases} x_0 = 4 \text{ m} \\ y_0 = 4 \text{ m} \end{cases} \quad t_1 = 1 \text{ s} \begin{cases} x_1 = 1 \text{ m} \\ y_1 = 7 \text{ m} \end{cases} \quad t_2 = 2 \text{ s} \begin{cases} x_2 = -8 \text{ m} \\ y_2 = 16 \text{ m} \end{cases}$$

$$v_0 = 2\sqrt{2} = 2{,}82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad v_1 = 4\sqrt{2} = 5{,}66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad v_2 = 8{,}48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. *Positions du mobile* aux dates $t = 0$ s; $t = 1$ s; $t = 2$ s.

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \text{ avec } x = 5 \cdot t \text{ et } y = -5 \cdot t^2 + 5 \cdot t$$

pour $t = 0$ s, on a : OM_0 $(x_0 = 0;\ y_0 = 0)$
$t = 1$ s, on a : OM_1 $(x_1 = +5;\ y_1 = 0)$
$t = 2$ s, on a : OM_2 $(x_2 = +10;\ y_2 = -10)$

Équation cartésienne de la trajectoire

$$t = \frac{x}{5}; \quad y = -5 \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{x}{5}\right); \quad Y = -\frac{X^2}{5} + X.$$

Cette courbe est une portion de parabole passant par l'origine d'axe parallèle à $y'y$, de sommet : $X_S = +2{,}5$ $\quad Y_S = +1{,}25$ **(fig. 4).**

Vitesse et accélération du mobile à la date $t = 1$ s

$\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$: $V_x = +5$

$V_y = (-10 \cdot t + 5)$.

A $t = 1$ s on a donc $\vec{V}_1 = 5 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}$ ⇒

$V_1 = \sqrt{50} = 7{,}07 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$\vec{A} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ ⇒ $\vec{A} = 0 \cdot \vec{i} - 10 \cdot \vec{j}$

l'accélération est un vecteur constant :
$\vec{A} = -10\vec{j}$; $A = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

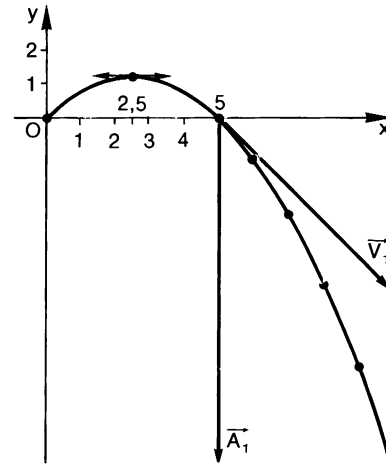


Fig. 4

3. *Position et vitesse du mobile* aux dates $t = 0$ s; $t = 1$ s; $t = 2$ s; $t = 3$ s.

$$\overrightarrow{OM_0} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \vec{V}_0 = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} \quad V_0 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\overrightarrow{OM_1} \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad \vec{V}_1 = 1 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} \quad V_1 = 2{,}24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\overrightarrow{OM_2} \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 4 \end{cases} \quad \vec{V}_2 = 1 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} \quad V_2 = 4{,}12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\overrightarrow{OM_3} \begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 9 \end{cases} \quad \vec{V}_3 = 1 \cdot \vec{i} + 6 \cdot \vec{j} \quad V_3 = 6{,}08 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Accélération du mobile **(fig. 5)**

$\vec{A} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow \vec{A} = 2 \cdot \vec{j}$;

Le vecteur accélération est constant;

$A = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Que devient la trajectoire du mobile si à $t = 2$ s l'accélération devient nulle?
Le mouvement devient rectiligne uniforme, la trajectoire est la demi-droite de vecteur directeur $\vec{V}_2$. Son équation est : $Y = 4 \cdot (X - 2) + 4$ et $X > 2$.

4. *Équation cartésienne* de la trajectoire et graphe de la fonction.
Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le mobile M est repéré à la date t par ses coordonnées

$Y_t = 5 \cdot t$ et $X_t = 3 \cdot t^2 + 4$.

On élimine le temps entre les deux équations $t = \dfrac{Y}{5}$.

D'où : $X = 3 \cdot \left(\dfrac{Y}{5}\right)^2 + 4$;

équation d'une demi-parabole d'axe OX et de sommet $Y_s = 0$; $X_s = +4$ **(fig. 6).** Le graphe de la fonction passe par les points :

y)	0	+3	+5	+7	+10	+15
x)	+4	+5,08	+7	+9,88	+16	+31

Fig. 5

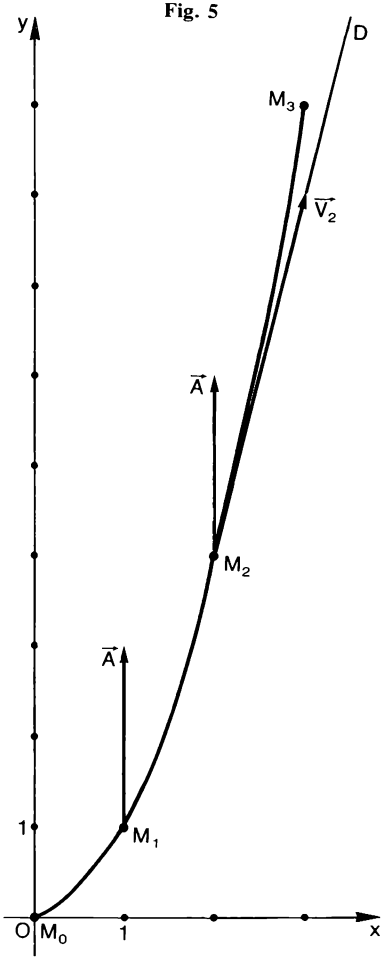
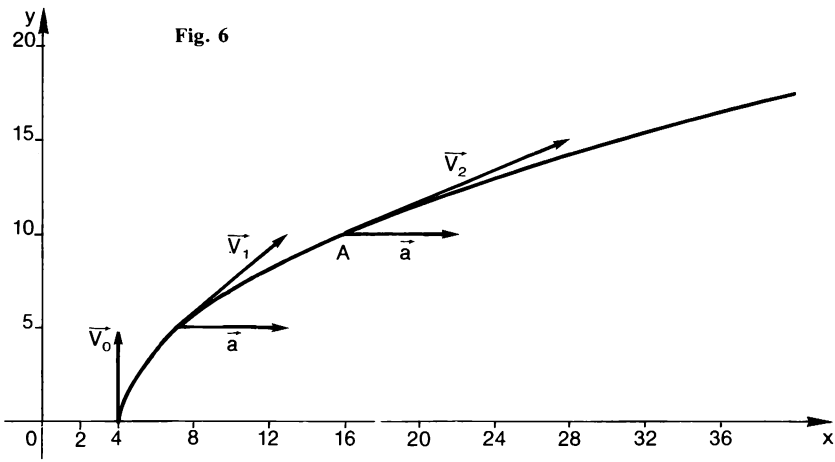


Fig. 6



2° Vitesse du mobile?

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{V} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} \quad \text{soit} \quad \vec{V} = (6 \cdot t) \cdot \vec{i} + 5 \cdot \vec{j}$$

$t = 0$ s : $\vec{V}_0 = 5 \cdot \vec{j}$ soit $V_0 = 5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$t = 1$ s : $\vec{V}_1 = 6\vec{i} + 5\vec{j}$ soit $V_1 = 7{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$t = 2$ s : $\vec{V}_2 = 12\vec{i} + 5\vec{j}$ soit $V_2 = 13\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$t = 3$ s : $\vec{V}_3 = 30\vec{i} + 5\vec{j}$ soit $V_3 = 30{,}4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

3° Accélération du mouvement?

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad \vec{A} = 6 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} = 6 \cdot \vec{i} \quad \text{soit} \quad A = 6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

l'accélération est un vecteur constant porté par l'axe $\overrightarrow{OX}$ sa norme est indépendante du temps.

4° Vérifier que le vecteur vitesse est un vecteur directeur de la tangente à la trajectoire au point A pour $t = 2$ s.

A la date $t = 2$ s le mobile est en A ($x = 16$; $y = 10$); la vitesse du mobile est alors : $\vec{V}_2 = 12 \cdot \vec{i} + 5 \cdot \vec{j}$; $\frac{V_y}{V_x} = \frac{5}{12}$.

La trajectoire a pour équation cartésienne $Y = 5\sqrt{\frac{X-4}{3}}$.

On doit calculer la valeur de la dérivée au point $X = 16$ qui correspond à la position du mobile à $t = 2$ s.

On utilise pour cela la fonction inverse $f^{-1} = 3 \cdot \frac{Y^2}{25} + 4$. f' (pour $X = 16$) est l'inverse de $(f^{-1})'$ pour $Y = 10$

$$(f^{-1})'_{(y=10)} = \frac{12}{5} \text{ donc } f'_{(x=16)} = \frac{5}{12}.$$

Le coefficient directeur de la tangente en A à la trajectoire est bien égal au rapport des composantes du vecteur vitesse $\frac{V_y}{V_x}$ en ce point.

5. $\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t^2 - 2t + 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} t = 2 - x \\ y = (2-x)^2 - 2(2-x) + 1 \end{matrix}$

D'où l'équation de la trajectoire : **(fig. 7).** $y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$ La trajectoire est parabolique.

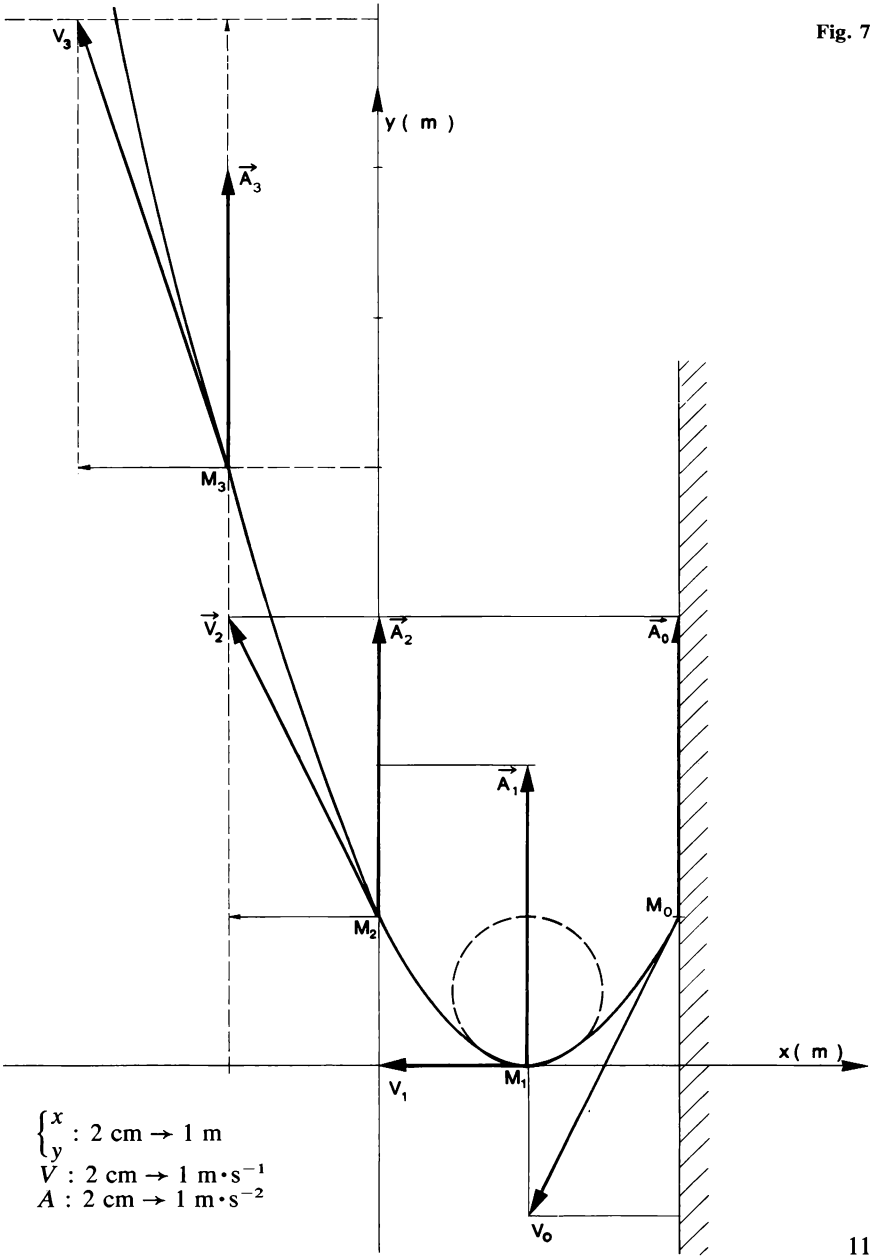
$y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

Or, $t > 0 \Rightarrow x < 2$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t^2 - 2t + 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad \begin{matrix} v_x = \dfrac{dx}{dt} = -1 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = 2t - 2 \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad \begin{matrix} A_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ A_y = \dfrac{d^2y}{dt_2} = 2 \\ A_z = \dfrac{d^2z}{dt^2} = 0 \end{matrix}$$

Fig. 7



Aux différentes dates (**fig. 3**) on peut représenter :

$t = 0$ s, $\overrightarrow{OM_0}\begin{cases} x = 2 \text{ m} \\ y = 1 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_0\begin{cases} v_x = -1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ v_y = -2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases} \Rightarrow \vec{A}_0\begin{cases} a_x = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \\ a_y = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \end{cases}$

$t = 1$ s, $\overrightarrow{OM_1}\begin{cases} x = 1 \text{ m} \\ y = 0 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_1\begin{cases} v_x = -1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ v_y = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases} \Rightarrow \vec{A}_1\begin{cases} a_x = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \\ a_y = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \end{cases}$

$t = 2$ s, $\overrightarrow{OM_2}\begin{cases} x = 0 \text{ m} \\ y = 1 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_2\begin{cases} v_x = -1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ v_y = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases} \Rightarrow \vec{A}_2\begin{cases} a_x = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \\ a_y = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \end{cases}$

$t = 3$ s, $\overrightarrow{OM_3}\begin{cases} x = -1 \text{ m} \\ y = +4 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_3\begin{cases} v_x = -1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ v_y = +4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases} \Rightarrow \vec{A}_3\begin{cases} a_x = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \\ a_y = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \end{cases}$

A l'instant $t = 1$ s, on voit que l'accélération est purement normale ($\vec{A}_1 \cdot \vec{V}_1 = 0$) donc $\vec{A} = \vec{A}_N$, or $A_N = \dfrac{v^2}{\rho} = A$,

expression dans laquelle A_N est l'accélération normale, v la norme du vecteur vitesse et ρ le rayon de courbure;

$$\rho = \frac{v^2}{A} = \frac{v^2{}_x + v_y^2}{A} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ m}.$$

APPLICATION AUX MOUVEMENTS RECTILIGNES

2

Un mouvement est rectiligne quand la trajectoire du mobile est une droite ou une portion de droite; vitesse et accélérations sont alors des vecteurs ayant comme direction commune celle de la droite.

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

1. Le vecteur vitesse est constant : $\vec{V} = \overrightarrow{C^{te}}\ (\forall t)$
Le vecteur accélération est nul : $\vec{A} = \vec{O}$

2. L'équation horaire s'écrit : .

$x = v \cdot t$ (si l'origine des temps est prise à l'origine des espaces)
$x = v \cdot t + x_0$ (cas général : en $t = 0$, $x = x_0$)

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ

1. Le vecteur accélération est constant : $\vec{A} = \overrightarrow{C^{te}}\ (\forall t)$

Le **vecteur vitesse** a même direction que l'accélération. Sur la trajectoire orientée, la vitesse varie linéairement avec le temps :
$v = A \cdot t + v_0$ (v et A sont algébriques).

2. On distingue deux cas :

$\vec{A} \cdot \vec{V} > 0$: mouvement accéléré
$\vec{A} \cdot \vec{V} < 0$: mouvement retardé

3. L'équation horaire s'écrit :

$x = \frac{1}{2} A \cdot t^2$ (si l'origine des temps est prise à l'origine des espaces, la vitesse étant alors nulle)
$x = \frac{1}{2} A \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ (si l'origine des temps est prise à l'origine des espaces, la vitesse v_0 étant différente de 0)
$x = \frac{1}{2} A \cdot t^2 + x_0$ (si l'origine des temps est prise au point $x_0 \neq 0$, la vitesse étant alors nulle)
$x = \frac{1}{2} A \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$ (cas général : en $t = 0$, $v = v_0$, $x = x_0$).

4. Relation entre déplacement, vitesse et accélération

Par élimination du temps on obtient : $v^2 - v_o^2 = 2A(x - x_0)$
et, plus généralement, entre deux positions M_1 et M_2 :

$$v_2^2 - v_1^2 = 2A \cdot (x_2 - x_1)$$

MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOÏDAL

1. L'équation horaire est de la forme : $X = X_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$
X_m est l'amplitude ou élongation maximale
ω est la pulsation : $\omega = 2\pi \cdot f$, f étant la fréquence.
$T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ étant la période
φ_0 est la phrase à l'origine des temps
$(\omega \cdot t + \varphi_0)$ est la phase à l'instant t.

2. Vitesse et accélération

$$V = \frac{dX}{dt} = -\omega \cdot X_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$A = \frac{dV}{dt} = -\omega^2 \cdot X_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

On constate que $A = -\omega^2 \cdot X$.

3. Théorème

Inversement, on démontre que si l'accélération d'un mouvement rectiligne est de la forme : $A = -\omega^2 \cdot X$, le mouvement est sinusoïdal, de pulsation ω. Plus généralement, si l'on a :
$A = -k \cdot X$, la pulsation vaut $\omega = \sqrt{k}$.
Les conditions initiales permettent alors de déterminer X_m et φ_0.

4. Remarque

Un mouvement circulaire uniforme (cf. leçon n° 3) de vitesse angulaire ω se projette sur un diamètre quelconque en un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude égale au rayon du cercle.

EXERCICES

1. Un mobile se déplace d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré $(A = 1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2})$ sur une route horizontale. Il part de A avec une vitesse initiale nulle, en direction de B. Quelle est la durée du trajet AB et la vitesse lors de l'arrivée en B si la distance entre A et B est de 200 m?

Réponses : $t^2 = \dfrac{2 \cdot AB}{A} \Rightarrow t = 20$ s; $V^2 = 2A \cdot AB \Rightarrow V = 20\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

(on a aussi $V = A \cdot t$)

2. Quelles sont les équations horaires du mouvement d'un mobile qui se déplace entre deux points A et B d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré l'origine des espaces est prise en A l'origine des temps est :

a) prise en A point de départ où la vitesse est nulle;

b) prise en B point d'arrivée où la vitesse est maximale;

c) prise en O, milieu de AB, où la vitesse est V_0.

Quel est, dans chaque cas, le domaine de définition de la variable temps t? application numérique $A = 1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$: $\text{AB} = 100\ \text{m}$

Réponses : *a*) $\frac{1}{2} A \cdot t^2 \left[0 < t < 10\sqrt{2}\right]$;

b) $\frac{1}{2} A \cdot t^2 + V_B \cdot t - \text{AB}\ \left[-10\sqrt{2} < t < 0\right]$;

c) $\frac{1}{2} A \cdot t^2 + V_0 \cdot t - \frac{\text{AB}}{2}\ \left[-10 < t < 10\,(\sqrt{2} - 1)\right]$.

3. Une locomotive démarre sur une voie rectiligne horizontale avec une accélération constante $A = 0{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. A quelle date atteint-elle la vitesse $V = 90$ km/h?

Quelle distance a-t-elle alors parcourue?

Réponses : $t = \frac{V}{A}$; $t = 180$ s; $d = \frac{1}{2} A \cdot t^2$; $d = 8\,100$ m.

4. Montrer que dans un mouvement rectiligne uniformément accéléré la vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la moyenne des vitesses V_1 à la date t_1 et V_2 à la date t_2.

Réponses : Dans le cas le plus général, l'équation horaire est de la forme :

$X = \frac{1}{2} A \cdot t^2 + V_0 \cdot t + X_0$; à la date t_1 on a :

$$X_1 = \frac{1}{2} A \cdot t_1^2 + V_0 \cdot t_1 + X_0$$

et, de même, X_2 à la date t_2.

La vitesse moyenne est : $\frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$

$$V_{\text{moy}} = \frac{A \cdot t_1 + V_0 + A \cdot t_2 + V_0}{2} \Rightarrow V_{\text{moy}} = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

5. Montrer que dans un mouvement uniformément accéléré la vitesse moyenne sur un intervalle de temps $(t_2 - t_1)$ est égale à la vitesse vraie à la date

$$\frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Réponse : $V_{\text{moy}} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$

en remplaçant X_2 et X_1 par leurs expressions on obtient :

$$X_2 - X_1 = -\frac{1}{2} A \cdot (t_2^2 - t_1^2) + V_0 \cdot (t_2 - t_1).$$

Après division par $(t_2 - t_1)$: on obtient : $A \cdot \frac{(t_2 + t_1)}{2} + V_0$ qui est l'expression de la vitesse à la date $\frac{(t_2 + t_1)}{2}$.

6. Un mouvement sinusoïdal a une amplitude de 5 cm et une fréquence de 50 Hz ; calculer sa pulsation et les valeurs maximales de la vitesse et de l'accélération.

Réponse : $\omega = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_m = 15{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $a_m = 4935 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

7. Un mouvement sinusoïdal a pour valeurs maximales de la vitesse et de l'accélération $v_m = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $a_m = 1885 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$: calculer sa pulsation et sa fréquence ainsi que son amplitude.

Réponse : $\omega = \frac{a_m}{v_m} = 188{,}5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $f = 30 \text{ Hz}$; $x_m = 5{,}3 \text{ cm}$.

8. Un mouvement sinusoïdal est défini par les valeurs initiales (à $t = 0$) :

$$x_0 = 3 \text{ cm}; \; v_0 = -5{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \; a_0 = -300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} :$$

déterminer sa pulsation et sa fréquence, son amplitude et la phase à l'origine.

Réponse : $\omega^2 = \frac{a_0}{x_0} = 10^4$; $\omega = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $f = 15{,}9 \text{ Hz}$;

$\frac{v_0}{x_0} = -\omega \tan \varphi_0 \Rightarrow \tan \varphi_0 = 1{,}733... \varphi_0 = 60°$, car $\cos \varphi_0 > 0$; $x_m = 6 \text{ cm}$.

PROBLÈMES

1. Dans un mouvement rectiligne uniformément accéléré, les espaces parcourus pendant des intervalles égaux à $\Delta t = 0{,}5$ s augmentent régulièrement de 1 m.

1° Quelle est l'accélération du mouvement?

2° Quelle est la loi horaire si à la date $t = 0$ s, le mobile est au point d'abscisse $+12$ m avec une vitesse nulle?

2. L'accélération d'un mouvement rectiligne est telle que $a = -9x$ (a en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et x en m) à tout instant. A la date $t = 0$ s, le mobile est au point de coordonnées +4m avec une vitesse nulle.

1° Déterminer la période et la fréquence.

2° Donner l'expression de la loi horaire du mouvement.

3. Sur une portion rectiligne ABCD de voie ferrée où s'effectuent des travaux, un train arrivant en A avec une vitesse de 108 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, a la marche suivante :

— de A à B, telle que $AB = 800$ m, son mouvement est retardé, réduisant sa vitesse en B à la valeur 54 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$;

— de B à C, pendant 1,5 min, son mouvement est uniforme;

— de C à D, son mouvement est uniformément accéléré de façon à ce que la vitesse reprenne la valeur de 108 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ en 40 s.

1° En prenant pour origine des espaces le point A, pour sens positif le sens de la marche du train, et pour instant initial la date de passage en A, déterminer les équations horaires des trois phases, et en particulier préciser l'espace parcouru de A à D.

2° Tracer les graphes des espaces, des vitesses et des accélérations en utilisant les mêmes échelles pour l'axe des dates dans les trois graphes.

4. Une automobile roule à la vitesse de $90\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ de façon uniforme. Un motard démarre au moment précis où l'automobile passe à son niveau, d'un mouvement uniformément accéléré et atteint la vitesse de $90\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ en 10 s sans cesser d'accélérer.

1° Combien de temps lui faudra-t-il pour rattraper l'automobile?

2° Quelle distance aura-t-il parcouru au moment où il rattrape l'automobile? Quelle vitesse a-t-il acquise?

5. Deux points mobiles A et B se déplacent tous les deux, le long d'un segment, d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude 10 cm. Le point A a une pulsation $\omega_A = 10\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et B une pulsation $\omega_B = 11\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

1° A la date $t = 0$ s, ils passent dans le même sens à l'origine des abscisses. A quelle date se rencontrent-ils à nouveau, avec chacun une vitesse de même signe?

2° Quelle distance aura parcouru le moins rapide? Le plus rapide?

SOLUTIONS

1. (Cf. théorème du cours.) 1° Si, dans un mouvement, les différences des espaces parcourus pendant des intervalles de temps égaux Δt, sont en progression arithmétique, le mouvement est uniformément accéléré, de raison :

$$r = a\cdot\Delta t^2.$$

Le mouvement est uniformément accéléré, la raison de la progression est

$$r = a\cdot\Delta t^2 \Rightarrow a = \frac{r}{\Delta t^2} = \frac{1}{(0{,}5)^2} = 4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

2° La loi horaire $x = \dfrac{a}{2}t^2 + v\cdot t + x_0 \begin{cases} t = 0\ \text{s} \\ x = 12\ \text{m} = x_0 \\ v = 0 = v_0. \end{cases}$

$$v = a\cdot t + v_0$$

$$\Rightarrow x = 2t^2 + 12 \quad \text{et} \quad v = \dot{x} = 4t$$

avec x en m, v en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et t en s.

2. 1° Ce mouvement est sinusoïdal, car $a = -9x$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il le soit. Il est donc de la forme

$$x = x_m\cdot\cos(\omega_0\cdot t + \varphi_0),\ v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0\cdot x_m\cdot\sin(\omega_0\cdot t + \varphi_0),$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2\cdot x_m\cdot\cos(\omega_0\cdot t + \varphi_0),\ a = -\omega_0^2\cdot x.$$

D'après la relation qu'on nous donne

$$\left.\begin{aligned} a &= -9x \\ a &= -\omega_0^2 \cdot x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = 3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Sachant que la vitesse est nulle aux extrémités du segment d'oscillation, on peut dire que $x_m = 4$ m.
Sachant que c'est à l'instant $t = 0$ s, $x_0 = 4$ m :

$$t = 0 \text{ s}, \; x_0 = x_m \cdot \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = \frac{x_0}{x_m} = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \text{Arc cos} \frac{x_0}{x_m} = 0$$

$$\varphi_0 = 0 \text{ rad (mod } 2\pi).$$

2° L'expression de la loi horaire est donc :

$$x = 4 \cos 3t \quad \begin{cases} x \text{ en m} \\ t > 0 \text{ en s} \end{cases}$$

La pulsation $\omega = 3$ rad·s^{-1} nous permet de connaître la fréquence et la période

$$\frac{2\pi}{\omega} = T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3} = 2{,}09 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = 0{,}48 \text{ Hz}.$$

3. **1° *a*)** — Sur la portion AB, $x_1 = \frac{a_1}{2} t^2 + v_A \cdot t$

Avec $\begin{cases} v_A = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} (108 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}) \\ v_B = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} (\; 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}) \end{cases}$

$$v_B^2 - v_A^2 = 2a_1(x_B - x_A) \Rightarrow a_1 = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2(x_B - x_A)} = -\frac{675}{2 \times 800} = -0{,}422 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Si on note t_1 le temps pour aller de A à B $t_1 = \frac{v_B - v_A}{a_1} = 35{,}55$ s.

$x_1 = -0{,}211t^2 + 30t \quad \forall t \in [0; 35{,}55 \text{ s}[$ et avec x en m,
$v_1 = -0{,}422t + 30 \quad \forall x \in [0; 800 \text{ m}[\qquad t$ en s.

— Sur la portion BC, $x_2 = v_B \cdot t + x_0$.
A l'instant $t = t_1$, $x_2 = x_B = 800$ m, $x_B = v_B \cdot t_1 + x_0 \Rightarrow x_0 = x_B - v_B t_1$

$$x_0 = 800 - 15 \times 35{,}55 = 266{,}75 \text{ m}.$$

$x_2 = 15t + 266{,}75 \qquad \forall t \in [35{,}55 \text{ s}; 125{,}55 \text{ s}[$
$v_2 = v_B = v_C = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \qquad \forall x \in [x_B, x_C[.$

Récapitulons :

$x_A = 0$

$x_B = 800$ m

$x_C = 15 \times 125{,}55 + 266{,}75 = 2\,150$ m, $x_B - x_C = 1\,350$ m.

***b*)** *De* C *à* D

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \frac{a_3}{2} t^2 + v_0 \cdot t + x_0' \\ v_3 &= a_3 \cdot t + v_0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{cases} \text{En C} \\ t_2 = 125{,}55 \text{ s} \Leftrightarrow v_3 = v_C = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{En D} \\ t_3 = 125{,}55 + 40 = 165{,}55 \text{ s} \\ v_3 = v_D = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{v_D - v_C}{t_3 - t_2} = \frac{15}{40} = 0{,}375 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2};$$

$$v_0 = v_D - a_3 \cdot t_3 = v_C - a_3 \cdot t_2 = -32{,}08 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$v_0 = 0{,}375t - 32{,}08 \Rightarrow x_3 = 0{,}188t_2 - 32{,}08t + x'_0.$$

Si $t = t_2 = 125{,}55$ s $\Rightarrow x_3 = \ldots \Rightarrow x'_0 = 3\,214{,}24$ m

$x_3 = 0{,}188t^2 - 32{,}08t + 3\,214{,}24$ m $\quad \forall t \in [125{,}55 \text{ s}; 165{,}55 \text{ s}]$

$v_3 = 0{,}375t - 32{,}08 \quad \forall x \in [2\,150 \text{ m}, 3\,050 \text{ m}]$

Pour $t = 165{,}55$ s

$$x_D = 3\,055{,}86 \text{ m}.$$

Or $x_D = AD$. C'est la distance totale parcourue pendant les trois phases du mouvement (cf. diagramme **fig. 1**).

2° Graphes des espaces : vitesses et accélérations

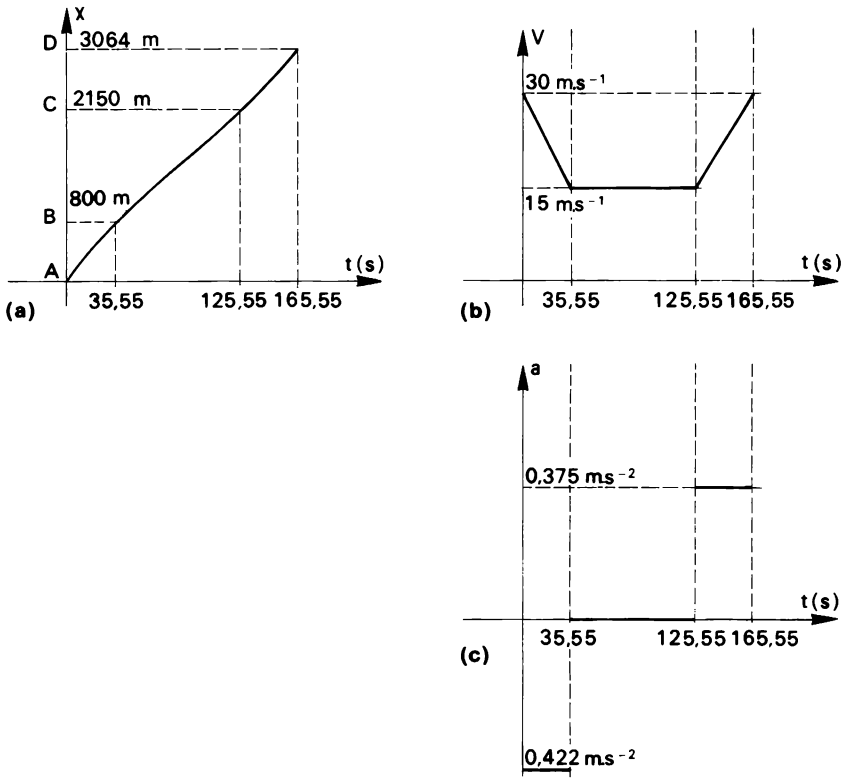


Fig. 1

4. 1° Moto $x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \Rightarrow v_x = a \cdot t$;

auto $y = v_0 \cdot t \Rightarrow v_y = v_0$.

Lors de la rencontre $x = y \neq 0 \Leftrightarrow v_0 \cdot t = a \frac{t^2}{2} : t \neq 0$.

Il faut un intervalle de temps $\Delta t = t = \frac{2v_0}{a}$ pour que la moto rattrape l'auto.

Or l'accélération de la moto est a telle que $a = \frac{v_0}{t_0}$ avec $t_0 = 10$ s; on aura donc : $t = 2t_0 = 20$ s.

2° La distance parcourue sera $x = y = v_0 \cdot t = \frac{20 \times 90\,000}{3\,600} = 500$ m.

La vitesse du motard sera $v = a \cdot t = 2v_0 = 180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

5. 1° A l'instant de la rencontre, le point A a effectué N_A oscillations. Au même instant, le point B a effectué une oscillation de plus puisqu'il est le plus rapide ($\omega_B > \omega_A$) donc $N_B = N_A + 1$.
T_A étant la durée d'une oscillation pour le point A.
T_B étant la durée d'une oscillation pour le point B.
La durée t que l'on cherche s'exprime donc : $t = N_A \cdot T_A = N_B \cdot T_B$.

Or $T_A = \frac{2\pi}{\omega_A}$ et $T_B = \frac{2\pi}{\omega_B} \Rightarrow N_A \frac{2\pi}{\omega_A} = (N_A + 1) \frac{2\pi}{\omega_B}$

$$\Rightarrow N_A = \frac{\omega_A}{\omega_B - \omega_A} \Rightarrow t = N_A \cdot T_A = \frac{2\pi}{\omega_B - \omega_A} : t = \frac{2\pi}{11 - 10} = 6{,}28 \text{ s}.$$

2° A chaque période, le plus lent parcourt $l = 40$ cm (10 cm pour aller, 10 cm retour sur les x abscisses positives, puis 10 cm aller et 10 cm retour sur les abscisses négatives).

$$T_A = \frac{2\pi}{\omega_A}$$
$$t = \frac{2\pi}{\omega_B - \omega_A}$$
$$\Rightarrow x = l \frac{t}{T_A} = N_A \cdot l = \frac{\omega_A}{\omega_A - \omega_B} \cdot l = 10 \times 0{,}4 = 4 \text{ m}.$$

Corrélativement, le point B aura effectué une oscillation de plus donc parcouru 40 cm de plus.

MOUVEMENTS CIRCULAIRES

3

1. Repérage de la position du mobile (fig. 1)

La trajectoire est un cercle. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la position de M est déterminée en fonction du temps par :

— *la connaissance de l'angle :* $\theta = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})$

— *la connaissance de l'abscisse curviligne :* $s = \overset{\frown}{AM} = R \cdot \theta$ (θ en radians)

— *la connaissance des coordonnées de M :* $X = R \cdot \cos\theta$ et $Y = R \sin\theta$.

2. Vitesse et accélération

L'étude du mouvement circulaire est très simple quand on utilise le résultat mathématique suivant :
La dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à son angle repère est un vecteur unitaire qui a tourné de $+\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta} = \vec{u}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

En particulier, dériver deux fois un vecteur unitaire, c'est le remplacer par son opposé.

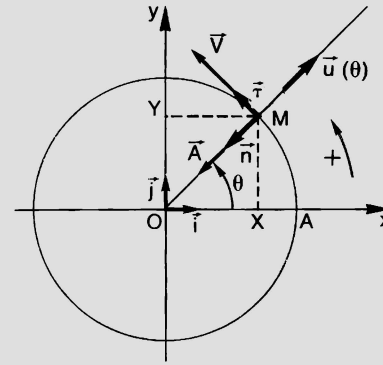


Fig. 1

Vecteur vitesse : la position est donnée par $\overrightarrow{OM} = \vec{R} \cdot \vec{u}(\theta)$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = R \cdot \frac{d\vec{u}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = R \cdot \omega \cdot \vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire de la tangente orientée; $\vec{\tau} = \vec{u}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire.

Un mouvement circulaire uniforme est caractérisé par une vitesse angulaire constante.

Vecteur accélération

— *Mouvement uniforme :* $\vec{A} = R \cdot \omega \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = R \cdot \omega \cdot \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$.

Soit $\vec{A} = R \cdot \omega^2 \cdot \vec{n}$

$\vec{n}$ est le vecteur normal, directement perpendiculaire à $\vec{\tau}$, donc opposé à $\vec{u}(\theta)$; il est dirigé vers le centre du cercle.

Un mouvement circulaire uniforme est caractérisé par une accélération normale, centripète, constante, de valeur :

$$A = R \cdot \omega^2, \text{ valant encore } \frac{V^2}{R}.$$

— *Mouvement non uniforme.* A l'accélération normale précédente (qui n'est plus constante en module car ω varie avec le temps) il faut ajouter une composante tangentielle :

$$\vec{A}_\tau = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{\tau} = R \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \vec{\tau}.$$

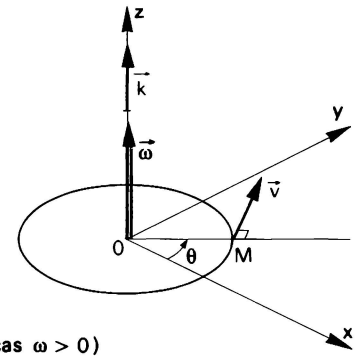
$\frac{d^2\theta}{dt^2}$ s'appelle l'accélération angulaire.

3. *Remarques*

1° Si le mouvement est uniforme il est également périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$; dans ce cas, la projection du mouvement sur un diamètre est un mouvement sinusoïdal de période T.

2° En introduisant l'axe Oz et son vecteur unitaire $\vec{k}$ et en posant $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$, **vecteur rotation,** on obtient facilement la relation (cf. Leçon *Produit vectoriel*).

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}.$$



(cas $\omega > 0$)

Fig. 2

EXERCICES

1. Démontrer que dériver un vecteur unitaire par rapport à son angle repère c'est le faire tourner de $+\pi/2$.
   Réponse : écrire le vecteur dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, dériver et interpréter le résultat.

2. Le point M d'un plateau de tourne-disque décrit un cercle de 0,1 mètre de rayon d'un mouvement circulaire uniforme à raison de 33 tours par minute, calculer la vitesse angulaire et les modules de la vitesse et de l'accélération.
   Réponse : $\omega = 1{,}1\pi \simeq 3{,}45$ rad·s^{-1}; $v = 0{,}345$ m·s^{-1}; $a = 1{,}2$ m·s^{-2}.

3. Un électron d'un faisceau, émis par effet thermoélectronique, placé dans un champ magnétique, décrit un cercle de diamètre 10 cm à la vitesse de 30 000 km·s^{-1}. Calculer la vitesse angulaire, la période et la fréquence (en tours par seconde).
   Réponse : $\omega \simeq 6 \cdot 10^8$ rad·s^{-1}; $T \simeq 1{,}05 \cdot 10^{-8}$ s; $N = 9{,}55 \cdot 10^7$ tr·s^{-1}.

4. On se place dans le référentiel géocentrique issu du centre de la Terre et pointant trois directions stellaires.

1° Calculer la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même.

2° Calculer la vitesse d'un point situé à 49° de latitude Nord, qui est celle de Paris (rayon terrestre : 6370 km).

Réponse : $T = 24\text{ h} \Leftrightarrow \omega = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$;

$$v = R \cdot \omega \cdot \cos\lambda = 304\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

5. Comment expliquez-vous qu'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme ait une accélération bien que la valeur du module de sa vitesse soit constante? Que savez-vous de cette accélération?
(Baccalauréat expérimental, session normale 1975, série S_1.)

Réponse : cf. cours. Insister sur le fait que s'il n'y avait pas d'accélération *le mouvement serait rectiligne;* ici l'accélération normale ne sert qu'à courber la trajectoire qui est décrite à vitesse numérique constante.

PROBLÈMES

1. On considère la trajectoire d'un point mobile orientée positivement dans le sens 1. Un point M décrit ce cercle d'un mouvement circulaire uniforme dans le sens 2 **(fig. 3)** à la vitesse de 5 $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$, le rayon du cercle est 2 cm; à l'origine des temps, le point M est en B, tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$.

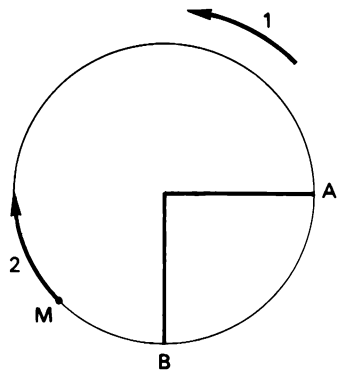


Fig. 3

Le point A sera pris comme origine des espaces.

a) Écrire les équations horaires du mouvement : $s(t)$, $\theta(t)$.

b) Représenter, en précisant l'échelle, la vitesse de M à l'instant $t = 0{,}3\pi$ s.

c) Représenter également son accélération à ce même instant (préciser l'échelle).

2. Un point M est mobile dans le plan repéré par $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{ cm}.$$

Ses coordonnées en fonction du temps sont :

$$x = 2 \cos t$$

$$y = 2 \sin t.$$

1° Montrer que son mouvement est circulaire et uniforme; quel est son sens?

2° Déterminer le vecteur accélération.

3° Quelle est l'expression de s, abscisse curviligne, en fonction du temps, l'origine étant choisie au point $A(2, 0)$?

3. Un point matériel effectue dans le plan repéré par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un mouvement circulaire de centre O, de rayon $R = 0{,}05$ m, avec une accélération angulaire constante (on appelle accélération angulaire la grandeur $\ddot{\theta}$ qui est la dérivée de la vitesse angulaire par rapport au temps; donc $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$). Ici $\ddot{\theta} = 0{,}2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$.

A l'instant $t = 0$, le point M est en M_0 $(R, 0)$ avec une vitesse nulle. On étudie le mouvement ultérieur du point M.

1° Exprimer en fonction du temps l'élongation angulaire θ, la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$.

2° Donner les expressions de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ du point M. (On déterminera en fonction du temps les composantes tangentielle et normale de l'accélération.)

3° Retrouver l'expression de la vitesse du point M en déterminant d'abord les projections du vecteur vitesse sur les axes Ox et Oy. Établir les fonctions du temps qui représentent les projections du vecteur accélération sur les axes.

SOLUTIONS

1. Le référentiel est matérialisé sur la **figure 4.**

$\vec{i}$: unitaire de $\overrightarrow{OA}$;

$\vec{j}$: directement perpendiculaire.

a) $s = v \cdot t + s_0$

$s_0 = \overset{\frown}{AB} = R \cdot \theta_0 = -R \frac{\pi}{2}$,

$s_0 = -\pi \cdot 10^{-2}$ m,

$v = -5 \cdot 10^{-2}$ m·s^{-1}.

$\Rightarrow s = -10^{-2}(5t + \pi)$

$\theta = \frac{s}{R} = \omega \cdot t + \theta_0$

$\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$,

$\omega = -2{,}5$ rad·s^{-1}.

$\Rightarrow \theta = -2{,}5t - \frac{\pi}{2}$.

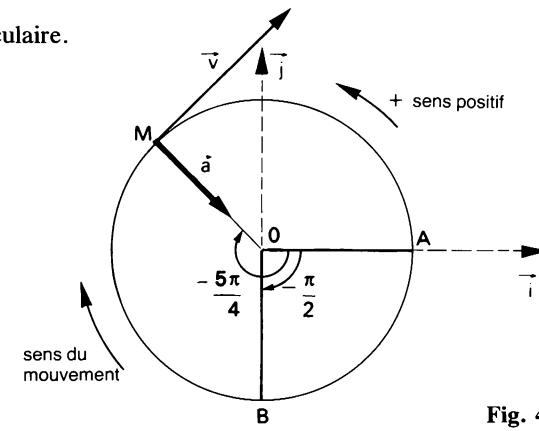


Fig. 4

b) • *Position de* M : $\theta = -2{,}5 \cdot 0{,}3\pi - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{5\pi}{4}$.

• *Vitesse :* elle est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$, orientée dans le sens du mouvement; en prenant une échelle de 1 cm pour $2 \cdot 10^{-2}$ m·s^{-1}, la « longueur » vaudra sur la figure 2,5 cm.

• *Accélération :* elle est centripète, valant $a = \dfrac{v^2}{R} = 12{,}5 \cdot 10^{-2}$ m·s^{-2}; en prenant une échelle de 1 cm pour 0,1 m·s^{-2} la « longueur » vaudra 1,25 cm.

2. **1°** Éliminons le temps : $x^2 + y^2 = R^2$: le mouvement est circulaire, de rayon $R = 2$ cm.

Calculons $\vec{V} = \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2 \sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2 \cos t \end{cases} \rightarrow v^2 = \| \vec{V} \|^2 = 4 \Rightarrow |v| = 2 \text{ cm·s}^{-1}$.

Le mouvement est donc circulaire uniforme; pour en déterminer le sens, remarquons que $\sin \theta = \dfrac{y}{R} \equiv \sin t$: le sens croissant de θ est bien le sens du mouvement (sens trigonométrique direct).

2° L'accélération est centripète, de module $\| \vec{a} \| = \dfrac{v^2}{R} = 2$ cm·s^{-2} (on peut aussi la calculer par ses composantes $x'' = -x$ et $y'' = -y$, numériquement); donc ici $\| \vec{a} \|$ (en cm·s^{-2}) $\equiv \| \overrightarrow{OM} \|$ (en cm).

3° On aura facilement $s = \overset{\frown}{AM} = v \cdot t$, compte tenu de l'origine choisie pour l'abscisse; soit numériquement : $s = 2t$ (en cm); on peut aussi écrire : $s = R \cdot \theta$ avec, ici, $\theta = t$.

3. **1°** D'après l'énoncé $\ddot{\theta} = 0{,}2$ rad·s^{-1}; $\dot{\theta} = \omega$ est primitive de $\ddot{\theta}$: $\dot{\theta} = \ddot{\theta} \cdot t + \dot{\theta}_0$; ici $\dot{\theta}_0 = 0$ et l'on a : $\dot{\theta} = \omega = 0{,}2t$ (en rad·s^{-1});

Enfin θ est primitive de $\dot{\theta}$: $\theta = \dfrac{1}{2} \ddot{\theta} \cdot t^2 + \theta_0$;

ici $\theta_0 = 0$ et l'on a : $\theta = 0{,}1\, t^2$ (en rad).

Ce mouvement est dit uniformément accéléré.

2° Le sens positif étant le sens trigonométrique l'abscisse curviligne vaudra : $s = \overset{\frown}{M_o M} = R \cdot \theta$; ici $s = 5 \cdot 10^{-3} t^2$ (m).

Vitesse : son module vaut $\dfrac{ds}{dt} = R \cdot \omega$, $v = 10^{-2} t$ (m·s^{-1}).

Accélération : l'accélération normale vaut $\dfrac{v^2}{R} \equiv R \cdot \omega^2$.

Soit $a_N = 2 \cdot 10^{-3} t^2$ (m·s^{-2}).

L'accélération tangentielle vaut $\dfrac{dv}{dt} \equiv R \cdot \ddot{\theta}$, soit $a_T = 10^{-2}$ (m·s^{-2}).

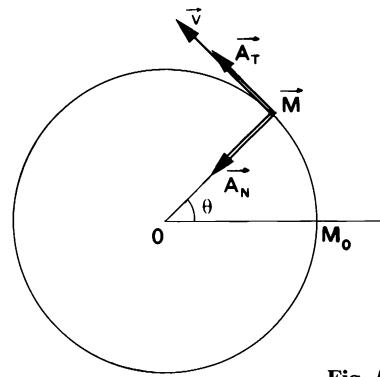


Fig. 5

Elle est constante, égale au produit par R de l'accélération angulaire : c'est ce résultat qui justifie le nom donné à un tel mouvement (par analogie avec le mouvement rectiligne), l'accélération normale produisant la courbure de la trajectoire.

3° Compte tenu des conditions initiales, le mouvement est décrit par l'équation $\theta = \theta(t)$ avec pour les projections sur les axes :

$$x = R \cdot \cos\theta \quad \text{et} \quad y = R \cdot \sin\theta.$$

On obtient donc, pour la vitesse, les composantes :

$$v_x = -R \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta \quad \text{et} \quad v_y = R \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta.$$

Soit encore :

$$v_x = R \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad v_y = R \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

qui prouve que le vecteur vitesse est porté par la direction $\theta + \frac{\pi}{2}$ (direction de la tangente au cercle en M) et que sa mesure sur cette direction orientée est $R \cdot \dot{\theta}$.
En sachant que $\theta = 0{,}1t^2 \Leftrightarrow \dot{\theta} = 0{,}2t$ et $R \cdot \dot{\theta} = v = 10^{-2}t$, les composantes de la vitesse s'écrivent :

$$v_x = -10^{-2}t \cdot \sin(0{,}1t^2) \quad \text{et} \quad v_y = 10^{-2}t \cdot \cos(0{,}1t^2)$$

on obtient les composantes de l'accélération, en dérivant encore :

$$a_x = -10^{-2}\left[\sin(0{,}1t^2) + 0{,}2t^2 \cdot \cos(0{,}1t^2)\right] \text{ en } \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

et

$$a_y = 10^{-2}\left[\cos(0{,}1t^2) - 0{,}2t^2 \cdot \sin(0{,}1t^2)\right].$$

Ces expressions représentent les projections de $\vec{A} = \vec{A}_N + \vec{A}_T$ respectivement sur les axes Ox et Oy. On remarque facilement que la projection de $\vec{A}_T$ donne les termes respectifs $(-10^{-2} \cdot \sin(0{,}1t^2),\ 10^{-2} \cdot \cos(0{,}1t^2))$ et celle de $\vec{A}_N$ donne les termes $(-0{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot t^2 \cdot \cos(0{,}1t^2),\ -0{,}2 \cdot 10^{-2}t^2 \cdot \sin(0{,}1t^2))$.

Plus généralement, sans se limiter au cas du mouvement uniformément accéléré, on aura :

$$a_x = -R \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin\theta - R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta$$
$$a_y = R \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos\theta - R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin\theta$$

que l'on peut interpréter ainsi :
— $-R \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin\theta$ et $R \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos\theta$, représentent les composantes d'un vecteur faisant avec l'axe Ox l'angle $\theta + \frac{\pi}{2}$ (c'est la direction de la tangente orientée en M) et de valeur $R \cdot \ddot{\theta}$: on retrouve l'accélération tangentielle liée à l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$;
— $-R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta$ et $-R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin\theta$, représentent les composantes d'un vecteur faisant avec l'axe Ox l'angle $\theta + \pi$ (c'est la direction de $\overrightarrow{MO}$) et de valeur $R \cdot \dot{\theta}^2$: on retrouve l'accélération normale, centripète, valant $R \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R}$.
Le fait que $\ddot{\theta}$ soit constant permet d'intégrer sans difficulté.

MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE

4

CENTRE D'INERTIE

1. Principe de l'inertie

Un système isolé est un système qui n'est soumis à aucune action extérieure (souvent on assimile à un système isolé un système qui est soumis à des actions extérieures qui se compensent; par exemple, un palet sur l'aérotable est soumis à la poussée de l'air qui compense la pesanteur).
Le principe d'inertie s'énonce :
Lorsqu'un solide — ou un système de solides — est isolé, c'est-à-dire libre de toute action que pourrait exercer sur lui tout autre système :
— *s'il est au repos,* il reste au repos;
— *s'il est en mouvement,* il existe un point du système dont le mouvement est rectiligne uniforme; ce point s'appelle **le centre d'inertie;**
— ces résultats ne sont vrais que dans une certaine classe de repères, appelés **repères galiléens.**
Un repère terrestre n'est galiléen que pour un mouvement qui fait abstraction du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même ou autour du Soleil.

2. Recherche du centre d'inertie

Les expériences faites en seconde ont mis en évidence la coïncidence du point dont on a observé le mouvement particulier avec le point défini comme le barycentre des points constituant le système, chacun d'eux étant affecté d'un coefficient qui est sa masse.
Ce qui conduit aux relations mathématiques :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{OM_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \cdot \overrightarrow{OG}$$

relation équivalente à :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}.$$

3. Quantité de mouvement d'un solide

La quantité de mouvement d'un point matériel de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ est :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{V}.$$

La quantité de mouvement d'un solide est égale à la somme des quantités de mouvements des points matériels qui le constituent :

$$\vec{P} = \Sigma m_i \cdot \vec{V}_i$$

on démontre que :

$$\vec{P} = M \cdot \vec{V}_G$$

M : masse totale du solide ($M = \Sigma m_i$);
V_G : vitesse du centre d'inertie.

4. *Conséquences*

Il résulte de la définition du centre d'inertie et du principe de l'inertie, que :
— *la quantité de mouvement d'un système isolé est un invariant*
— *pour modifier le mouvement d'un système,* il faut exercer sur lui une action extérieure.

SYSTÈME SOUMIS A DES ACTIONS INTÉRIEURES ET EXTÉRIEURES

1. *Principe de l'action et de la réaction*

Si un système S exerce sur un autre système S′ une force $\vec{F}$: S′ exerce sur S la force $-\vec{F}$. A l'intérieur d'un système il y a donc compensation de toutes les interactions entre les parties du système ce qui permet de comprendre la *non-intervention des forces intérieures dans le mouvement du centre d'inertie* du système et la nécessité de définir le système étudié pour connaître ce qui agit de l'extérieur et ce qui se passe à l'intérieur.

2. *Théorème du mouvement du centre d'inertie*

Le centre d'inertie d'un système matériel quelconque, rigide ou déformable a même mouvement qu'un point matériel libre où serait concentrée toute la masse du système et sur lequel seraient appliquées toutes les forces extérieures agissant sur tous les éléments du système.

3. *Relation fondamentale de la dynamique*

Dans un repère galiléen la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un solide est égale à la somme des forces extérieures agissant sur ce solide.

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M \cdot \frac{d\vec{V}_G}{dt}.$$

C'est une relation de cause (forces) à effet (variation de $\vec{P}$).

4. *Théorème de l'énergie cinétique*

La variation de l'énergie cinétique d'un système matériel entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces intérieures et extérieures auxquelles le système est soumis pendant cet intervalle de temps :

$$E_{C_2} - E_{C_1} = W_{\vec{F}}.$$

EXERCICES

1. Quel est le centre d'inertie de trois masses ponctuelles égales placées en trois points A, B, C?
   Réponse : le point de concours des médianes du triangle ABC.

2. On dispose de trois plaques carrées de côté a d'épaisseur e homogène de masse m. Soit G_1, G_2, G_3 les centres d'inertie de ces plaques.
Comment faut-il les disposer pour que le centre d'inertie G du système formé par les trois plaques soit confondu avec le centre d'inertie de l'une d'elles?

Réponse : les trois plaques sont superposées; le centre d'inertie de l'ensemble est confondu avec le centre d'inertie de la plaque située au milieu de la pile. Les trois plaques sont disposées de telle sorte que les centres d'inertie soient alignés et que le centre d'inertie de l'une des plaques soit au milieu du segment formé par les centres d'inertie des deux autres.

3. On dispose d'une plaque carrée qui flotte sur une aérotable, soit G le centre d'inertie de cette plaque. Comment doit-on disposer trois surcharges A, B, C de même masse m pour que le centre d'inertie de l'ensemble plaque plus surcharges reste sur la verticale de G?
On remplace les trois surcharges A, B, C par trois règles de même longueur et de même masse M formant un triangle. Comment doit-on disposer ces règles pour que le centre d'inertie de l'ensemble reste sur la verticale de G?

Réponses : les trois masses doivent former un triangle tel que le point de concours des médianes soit au-dessus de G.
Les trois règles forment un triangle équilatéral, les centres d'inertie des trois règles forment aussi un triangle équilatéral qui a son centre d'inertie au point de concours des médianes du triangle formé par les trois sommets du triangle ayant les règles pour côté. Les trois règles doivent former un triangle équilatéral ayant son centre de gravité au-dessus de G.

4. La résultante des forces appliquées à un mobile a une intensité constante $\| \vec{F} \| = Cte$. Dans quel cas la vitesse du mobile $\vec{V}$ peut-elle conserver une mesure constante?

Réponse : la résultante des forces $\vec{F}$ doit toujours rester perpendiculaire au vecteur vitesse. Il en résulte une puissance $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{V}$ toujours nulle, donc pas de variation de l'énergie cinétique du mobile. La trajectoire du mobile sera un cercle et le mouvement sur cette trajectoire uniforme.

5. Un mobile se déplace à vitesse constante V sur une piste elliptique dans un plan horizontal. La somme des forces qui agit sur le mobile peut-elle être nulle? Peut-elle garder une mesure constante?

Réponse : il y a variation de l'orientation du vecteur vitesse donc il faut que le mobile soit soumis à une force qui à chaque instant courbe la trajectoire. Cette force est du type

$$f = \frac{m \cdot V^2}{r}.$$

Le rayon de courbure de la trajectoire n'étant pas constant la force f ne peut conserver une mesure constante, m et $\| \vec{V} \|$ étant C^{te}.

6. Une masse $m = 100$ g est solidement liée à un fil inextensible de masse négligeable de longueur $L = 1$ m. La masse décrit une trajectoire circulaire dans un plan vertical à vitesse constante $V = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
Quelle est l'intensité de la force exercée sur le fil quand la masse m passe par la position la plus basse et la position la plus haute de la trajectoire?
En prenant pour origine des temps l'instant t_0 correspondant au passage par la position la plus basse, donner l'expression de la force exercée sur le fil f en fonction du temps.

Réponses : la somme des forces exercées sur la masse m doit être

$$T = \frac{m \cdot V^2}{L}.$$

Cette force est constante, on a donc dans la position la plus basse

$$f = T + m \cdot g$$

et dans la position la plus haute

$$f' = T - m \cdot g; \quad T = 10 \text{ N}; \quad f = 11 \text{ N}; \quad f' = 9 \text{ N}$$

en fonction du temps

$$f = T + m \cdot g \cdot \cos\left(\frac{V}{L} \cdot t\right).$$

7. Un traineau de poids $P = 2\,000$ N est tiré, à vitesse constante, sur une pente à 25° : une mesure au dynamomètre donne $T = 1\,000$ N. Calculer la norme de la force de frottement F. Quelle est la réaction normale du sol?

Réponse : faire un schéma des forces ramenées au centre d'inertie : $\overrightarrow{\Sigma F} = \vec{0}$; projeter sur les axes $\overrightarrow{Gx}$ et $\overrightarrow{Gy}$:

$T = F + P \cdot \sin \alpha$; $\quad R = P \cdot \cos \alpha$

en normes.

Numériquement :

$F = 155$ N; $\quad R = 1\,813$ N.

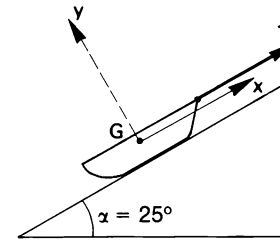


Fig. 1

8. Un solide de masse 5 kg descend selon la verticale en un lieu où $g = 9{,}80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ avec une accélération constante $\vec{a}$, de mesure algébrique $12{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ sur la verticale descendante. Quelles conclusions pouvez-vous tirer sur la nature du mouvement, les forces appliquées au solide? Proposer un dispositif pour mesurer $\| \vec{a} \|$.

Réponse : le mouvement est uniformément accéléré, le solide est soumis à son poids, $\vec{P}$, et à un ensemble de forces de résultante $\vec{F}$, constante. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

Pour mesurer l'accélération $\| \vec{a} \|$, on peut utiliser un accéléromètre à ressort fixé au solide. Ici

$$F = m \cdot a - m \cdot g = 13{,}50 \text{ N}.$$

PROBLÈMES

1. Un palet double est lancé sur l'aérotable, puis abandonné à lui-même. On photographie en pose les éclairs émis en phase et avec la même période (1/25 s), de deux lampes clignotantes fixées, l'une au centre d'inertie du palet O, la deuxième, en un point A. Les positions de O et A sont représentées sur la figure 2.

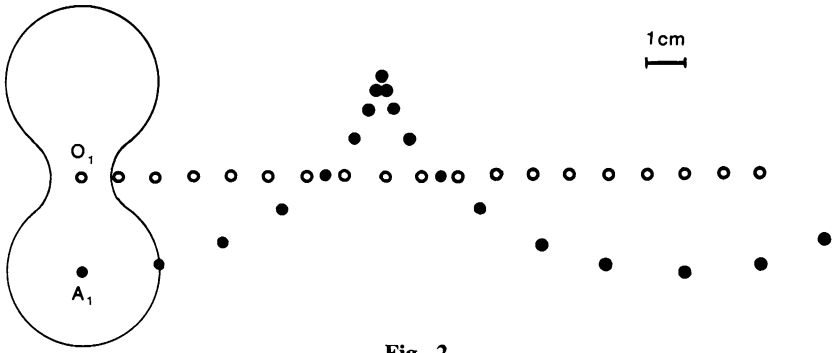


Fig. 2

1° Déterminer la vitesse du centre d'inertie du palet.

2° Représenter le mouvement du point A dans un repère lié au centre d'inertie O.
Pour cela, on construira à partir d'un point O fixe, les vecteurs OA successifs. Quel est ce mouvement? Quelle est sa vitesse angulaire? Conclusion?

2. Un mélange d'hélium et de néon est contenu dans une ampoule, à la température ambiante; la pression dans l'ampoule est de 1 atmosphère. Les vitesses d'un atome d'hélium et d'un atome de néon à l'instant t, sont représentées sur la figure 3.

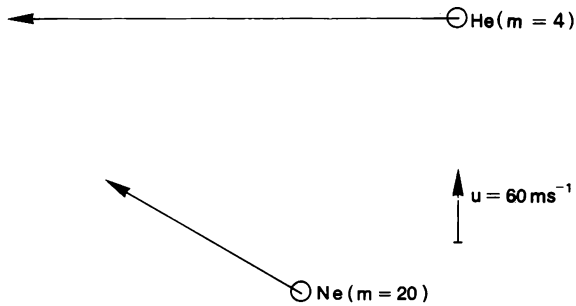


Fig. 3

1° Les atomes pouvant être considérés comme isolés, trouver par construction la position de leur centre d'inertie et sa vitesse.

2° Si le système des deux atomes n'est pas isolé, déterminer cette vitesse à l'instant t. Cette vitesse est-elle constante?

3. Un solide de masse $m = 1$ kg est soumis successivement à des forces de même direction et même sens pendant les durées suivantes :

$t = 0$ à 1 s $F_1 = 0$ $t = 3$ à 4 s $F_4 = 0{,}5$ N

$t = 1$ à 2 s $F_2 = 3$ N $t = 4$ à 5 s $F_5 = 0{,}25$ N

$t = 2$ à 3 s $F_3 = 1{,}5$ N.

a) Tracer le graphe $t \rightarrow F$.

b) Déterminer graphiquement la variation de la quantité de mouvement du solide entre les instants $t = 1$ s et $t = 5$ s.

c) Porter, sur le même diagramme, le graphe des variations de la vitesse en fonction du temps $t \rightarrow v$.

4. Un objet de masse 8 kg se déplace en ligne droite, à la vitesse de 10 $m \cdot s^{-1}$. Une force constante $\vec{F}$ de norme 50 N s'exerce alors sur lui pendant 2,5 s et sa vitesse devient 2 $m \cdot s^{-1}$ sans que sa trajectoire change de direction ni de sens. Analyser l'expérience : quelles sont les forces qui s'exercent sur l'objet, avant et après l'action de $\vec{F}$? Quelle est la direction de $\vec{F}$ par rapport à celle du déplacement de l'objet?

5. Un skieur de poids 800 N est tiré à vitesse constante le long d'une pente inclinée de 30° par rapport à l'horizontale. La force de frottement des skis sur la neige est $\|\vec{f}\| = 50$ N. Calculer la norme de la tension dans la perche qui fait l'angle $\beta = 45°$ avec la direction du mouvement, ainsi que celle de la réaction normale du sol (**fig. 4**).

Fig. 4

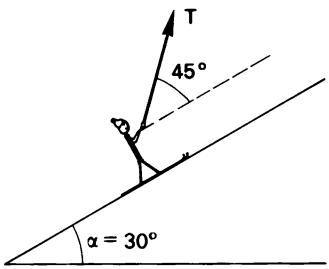
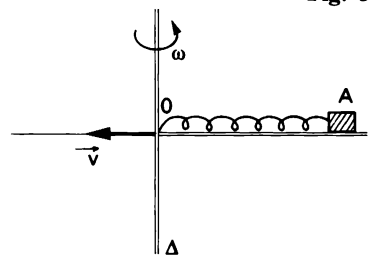


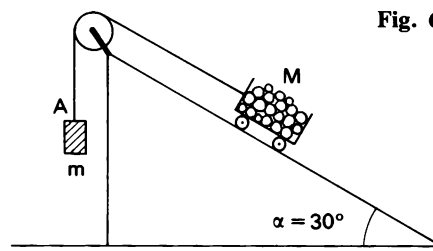
Fig. 5



6. Le système masse ressort fixé en O sur l'axe des rotations Δ repose sans frottement sur un plan horizontal et est entraîné à la vitesse angulaire de 3 000 tr/min. La longueur du ressort au repos étant 20 cm et la masse de A de 100 g, quelle doit être la raideur du ressort pour que la masse en rotation ne s'écarte que de 30 cm de l'axe? (**fig. 5**).

7. Un wagonnet W de masse $M =$ 100 kg roule sur un plan incliné faisant un angle de 30° avec l'horizontale. Il est relié par une corde à un corps A de masse $m = 75$ kg. La corde est inextensible, et sa masse ainsi que celle de la poulie sont négligeables. Calculer l'accélération du wagonnet et la tension de la corde (**fig. 6**). $g = 9{,}8$ $m \cdot s^{-2}$.

Fig. 6



8. Une voiture de masse $M = 900$ kg tracte une caravane de masse $m = 450$ kg. Dans tout l'exercice on considérera des forces de frottement constante soit $f = 900$ N sur la voiture et $f' = 450$ N sur la caravane. L'ensemble part du repos à la date $t_0 = 0$ et atteint sur une distance de 300 m d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré la vitesse $V = 90$ km·h^{-1}.

1° Quelle est l'accélération et la durée de cette phase du mouvement?

2° Quelle est la force de traction développée par le moteur et la force exercée par le crochet d'attelage sur la caravane?

3° Le mouvement devient alors rectiligne uniforme sur une route horizontale. Quelle est la puissance développée par le moteur et la force de traction exercée sur la caravane par le crochet d'attelage?

4° Que deviennent la puissance développée par le moteur et la force exercée sur le crochet d'attelage par la caravane si l'ensemble grimpe en conservant cette vitesse une côte de pente 5 pour cent?
On prendra $g = 10$ m·s^{-2}.

9. Une fusée à décollage vertical (type V2) a une masse de 15 tonnes. Elle est posée verticalement sur le sol, et l'on opère la mise à feu. Les gaz sont éjectés avec une vitesse constante de 2 400 m·s^{-1} par rapport à la fusée.

1° Quel doit être le débit minimum des gaz δ_0 (masse éjectée par seconde) pour que la fusée décolle?

2° Le débit δ est en fait de 100 kg·s^{-1}. Quelle est l'accélération de la fusée au décollage?

3° La masse de propergol embarquée représentait 80 % de la masse initiale de la fusée. Combien de temps les réacteurs fonctionneront-ils? Quelle est l'accélération maximale de la fusée?

4° Quelle est la vitesse maximale de la fusée? A-t-elle passé le mur du son?

5° Quel sera son mouvement lorsque le propergol sera épuisé?

5° L'accélération de la pesanteur pourra être considérée comme constante pour tout le parcours de la fusée ($g = 9{,}8$ m·s^{-2}).

SOLUTIONS

1. **1°** 25 cm·s^{-1}.

2° Dans le repère lié à O, le mouvement du point A est circulaire et uniforme. Sa vitesse angulaire est $\omega = \Delta\alpha/\Delta t = 9{,}6$ rad·s^{-1}, car $\Delta\alpha = \pi/8 = 22{,}5°$.
Le mouvement d'un solide isolé peut être décomposé en un mouvement de translation uniforme de son centre d'inertie O, et un mouvement de rotation uniforme autour de O.

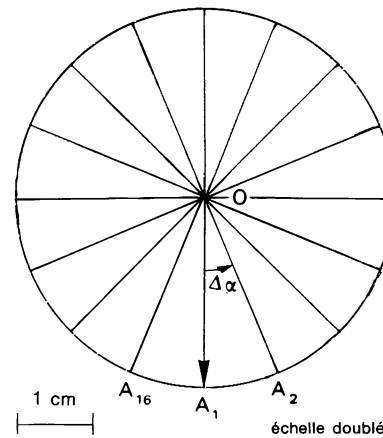


Fig. 7

2. 1° Dans les conditions de l'expérience, les atomes n'interagissent pas (gaz parfait monoatomique), et leur système est isolé du milieu extérieur. Ils peuvent être assimilés à des masses ponctuelles, dont la vitesse reste constante.
A l'instant t_1, leur centre d'inertie se trouve en I_1, placé entre A_1 et B_1 et tel que

$$\overrightarrow{A_1I_1} = \frac{5}{6}\overrightarrow{A_1B_1}.$$

A l'instant t_2, il se trouve en I_2, tel que

$$\overrightarrow{A_2I_2} = 5/6\,\overrightarrow{A_2B_2}.$$

La vitesse moyenne du centre d'inertie peut donc être représentée par le vecteur $\overrightarrow{I_1I_2}$, entre les instants t_1 et t_2. Elle vaut 210 $m \cdot s^{-1}$.

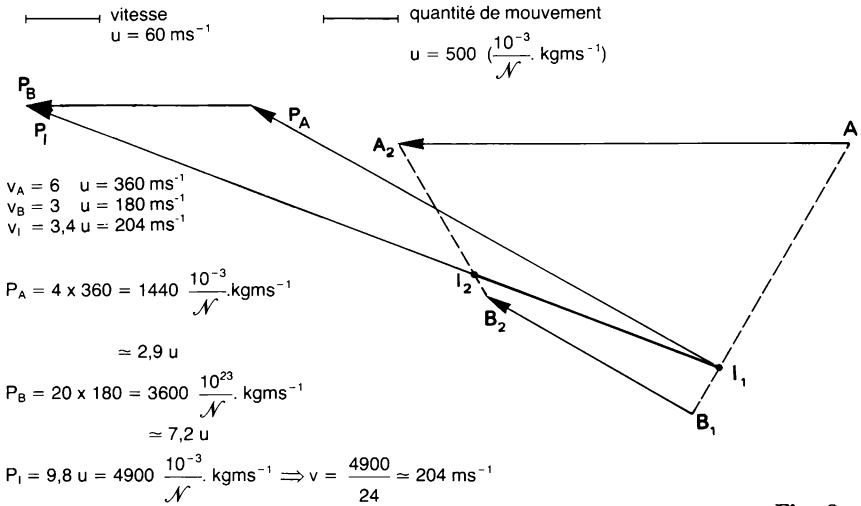


Fig. 8

2° Si le système des deux atomes ne peut être considéré comme isolé, la vitesse de leur centre d'inertie n'est pas constante. A l'instant t_1, sa quantité de mouvement est :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_A + \vec{p}_B.$$

On construit donc le vecteur $\vec{p}_1$, puis, on en déduit $\vec{v}_1$, vitesse du centre d'inertie à l'instant t_1. On trouve, bien sûr, la même vitesse qu'au **1°.**

3. Pendant chaque intervalle de temps où la force appliquée au solide reste constante, on peut écrire :

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t.$$

Entre les instants 1 s et 5 s, la variation de la quantité de mouvement est égale à la somme de ses variations entre 0 et 1 s, 1 et 2 s, 2 et 3 s..., soit :

$$\Delta p = 3 \cdot 1 + 1{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 1 = 5{,}25 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(aire grisée sur le graphe).

La force exercée sur le solide pendant chaque intervalle de durée 1 s étant constante, la vitesse du solide est une fonction affine du temps, pour chaque intervalle. Il suffit donc de la calculer à $t = 1$ s, 2 s, 3 s (voir graphe).

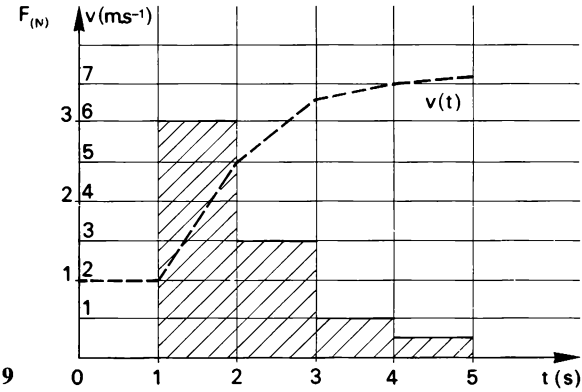


Fig. 9

4. Le mobile se déplaçant à vitesse constante, est soumis à un ensemble de forces dont la résultante est nulle. Le cas réel le plus simple est représenté sur la **figure 10 *a*.** Si sa vitesse varie, donc sa quantité de mouvement, c'est que s'exercent sur lui des forces dont la résultante est :

$$\Sigma \vec{f} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = -25{,}6\vec{i} \text{ (N)} \quad \textbf{(fig. 10 } \boldsymbol{b}\textbf{)}.$$

Ici, les forces sont : le poids (78 N), la réaction du support $\vec{R}'$, et $\vec{F}$. On a donc :

$$\Sigma \vec{f} = \vec{P} + \vec{R}' + \vec{F} = -25{,}6\vec{i}.$$

Projetons cette relation sur $\overrightarrow{x'x}$ et $\overrightarrow{y'y}$:

$$\bar{F}_x = -25{,}6 \text{ (N)} \qquad (1)$$

$$\bar{P} + \bar{R}' + \bar{F}_y = 0. \qquad (2)$$

La norme de $\vec{F}$ étant 50 N, la formule (1) permet d'obtenir F_y :

$$\| \vec{F} \|^2 = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F_y = \sqrt{\| \vec{F} \|^2 - F_x^2} = 42{,}9 \text{ (N)}.$$

On calcule $\vec{R}'$ à partir de la formule (2) :

$$\bar{R}' = -\bar{F}_y - \bar{P} = -42{,}9 + 78 = 35{,}1 \text{ (N)}.$$

La direction de $\vec{F}$ par rapport au déplacement de l'objet est définie par :

$$|\tan \alpha| = |F_y / F_x| = 1{,}67 \Rightarrow \alpha = 59°.$$

Dans le cas choisi, il existe une autre possibilité, schématisée sur la **figure 10 *c*.**

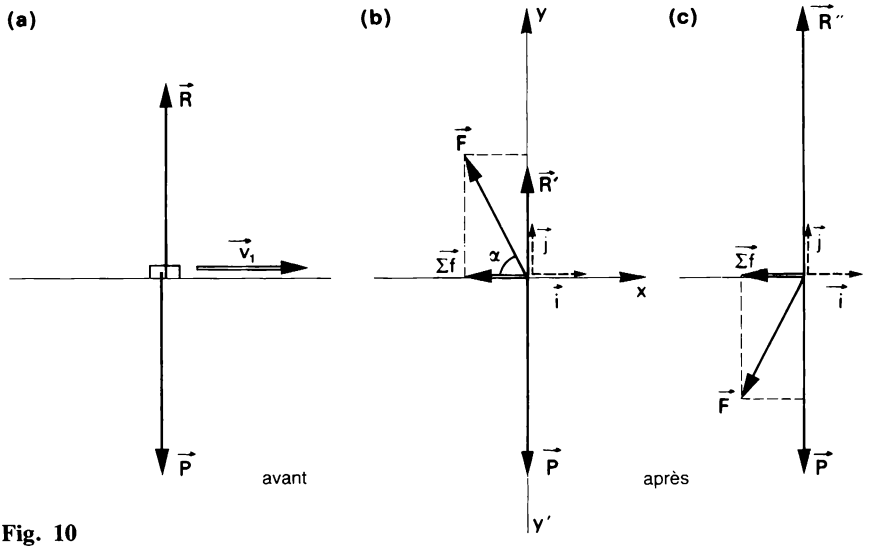


Fig. 10

5. Le mouvement du skieur étant rectiligne et uniforme, la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle :

$\vec{f} + \vec{R} + \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

sur l'axe $\vec{Ix}$: $T \cdot \cos \beta = f + P \cdot \sin \alpha$

sur l'axe $\vec{Iy}$: $T \cdot \sin \beta = P \cdot \cos \alpha - R.$

(en normes)

On déduit : $T \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 450 \text{ N} \Rightarrow T = 636 \text{ N}$

et $R = P \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + T \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 243 \text{ N};$

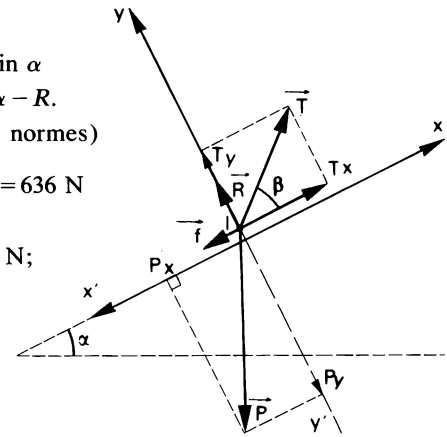


Fig. 11

6. Le corps A a un mouvement circulaire uniforme. Son accélération se réduit à l'accélération normale $\vec{a}_N$, centripète, de norme $\omega^2 \cdot R$. Les forces qui s'exercent sur A sont son poids $\vec{P}$, la réaction du support $\vec{R}$, et la force de rappel du ressort $\vec{F}$.

On a :

$$\Sigma \vec{f} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_N$$

La projection de cette relation sur un axe vertical montre que $\overline{P} + \overline{R} = 0$, donc, que $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$. Il reste alors :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_N.$$

La force de rappel du ressort est : $\vec{F} = -K \cdot \overrightarrow{\Delta l}$, $\overrightarrow{\Delta l}$ étant l'allongement du ressort. D'où :

$$-K \cdot \overrightarrow{\Delta l} = m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \vec{u} \Rightarrow m \cdot \omega^2 \cdot R = K \cdot \Delta l \quad \text{avec} \quad \Delta l = 10 \text{ cm};$$

$$K = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot R}{\Delta l} = 29609 \simeq 3 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

7. Décomposons l'ensemble du système en deux sous-systèmes 1 et 2 (voir **figure**).

a) *Système 1 :* Les forces qui s'exercent sur A sont son poids, $m \cdot \vec{g}$ et la tension de la corde $\vec{T}$. Il a donc une accélération $\vec{a}$ telle que :

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} + \vec{T} \Rightarrow \vec{T} = m(\vec{a} - \vec{g}).$$

Projetons cette relation sur $\overrightarrow{Y'Y}$:

$$\overline{T} = m(\overline{a} - \overline{g}), \qquad (\overline{g} > 0) \tag{1}$$

b) *Système 2 :* Les forces qui s'exercent sur le wagonnet sont son poids, $M \cdot \vec{g}$, la tension de la corde $\vec{T}'$ et la réaction du plan incliné $\vec{R}$. Son accélération $\vec{a}'$ est telle que

$$M \cdot \vec{a}' = M \cdot \vec{g} + \vec{T}' + \vec{R} \Rightarrow \vec{T}' = M(\vec{a}' - \vec{g}) - \vec{R}.$$

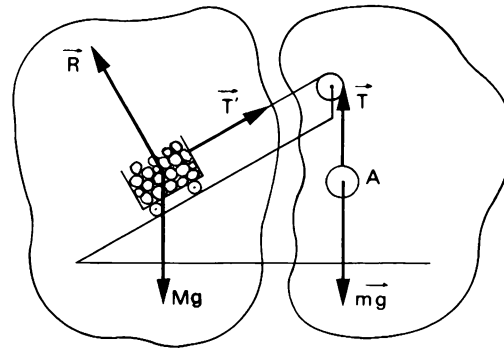


Fig. 12

Projetons cette relation sur $\overrightarrow{X'X}$:

$$\overline{T}' = M(\overline{a}' - g \cdot \sin 30°), \quad (g > 0) \tag{2}$$

c) *Liaison système 1 et 2 :* Puisque l'on néglige les masses de la corde et de la poulie, cette dernière a seulement pour effet de changer direction et sens des tensions, sans changer leurs normes : $\|\vec{T}\| = \|\vec{T}'\|$, soit, en remarquant que $\overline{T}$ et $\overline{T}'$ sont toutes deux négatives :

$$\overline{T}' = \overline{T} \tag{3}$$

D'autre part, le wagonnet et A étant reliés par une corde inextensible, leurs accélérations ont même norme : $\|\vec{a}\| = \|\vec{a}'\|$. Si le système a un mouvement tel que W descend alors que A monte, $\overline{a}$ est négative et $\overline{a}'$ positive. Si le mouvement est inverse, $\overline{a}$ est positive et $\overline{a}'$ négative. On a, dans tous les cas :

$$\overline{a}' = -\overline{a} \tag{4}$$

La résolution du système des 4 équations (1), (2), (3) et (4) conduit à :

$$\overline{a} = \frac{-M \cdot g/2 + mg}{M + m} = g \frac{-M/2 + m}{M + m} = 1{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

On pourrait aisément calculer la tension de la corde à l'aide de la relation (1) :

$$\bar{T} = m(\bar{a} - \bar{g}) = -630 \text{ N}.$$

Puisque $\bar{a}$ est positive, le wagonnet monte, et A descend.

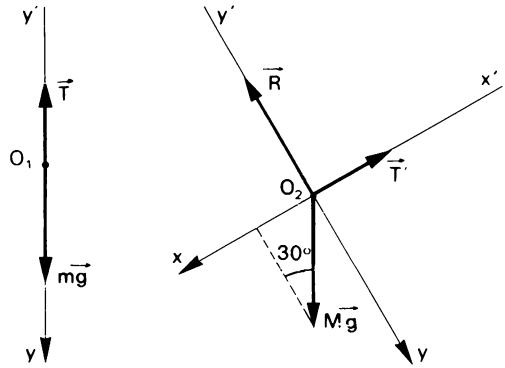


Fig. 13 système 1 système 2

8. 1° Calcul de l'accélération

$$V^2 = 2 \cdot a \cdot x, \quad a = \frac{(25)^2}{600}, \quad a = 1{,}04 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Calcul de la durée de la phase de démarrage : $t = \dfrac{V}{a}$ $t = 24$ s.

2° Force de traction développée par le moteur :

$$F = f + f' + (M + m) \cdot a \qquad F = 2754 \text{ N}.$$

Force exercée sur le crochet d'attelage de la caravane F'.
Le système en mouvement est la caravane, on a donc :

$$F' = f' + m \cdot a$$

$$F' = 918 \text{ N}.$$

3° Puissance développée par le moteur sur la route horizontale.
Le moteur doit uniquement compenser les frottements soit F = 1 350 N.
La puissance est alors $P = \vec{F} \cdot \vec{V}$ $P = 33\,750$ W.
La force exercée sur le crochet d'attelage de la caravane est $F' = f' = 450$ N.
Dans la côte de 5 pour cent la force exercée par le moteur est

$$F = (M + m) \cdot g \cdot \sin(a) + f + f'$$

$$F = 2\,025 \text{ N}.$$

La puissance est alors $P = 50\,625$ W et la force exercée sur le crochet d'attelage de la caravane $F' = f' + m \cdot g \cdot \sin(a)$ $F' = 675$ N.

9. 1° La fusée posée sur le sol est soumise à son poids $\vec{P} = M_0 \cdot \vec{g}$ et à la réaction du support $\vec{R}$. Lorsque les réacteurs fonctionnent, les gaz sont éjectés à la vitesse $\vec{u}$ par rapport à la fusée. Une masse Δm de gaz subit, de la part de la fusée, une force moyenne $\vec{f}$:

$$\vec{f} = \frac{\Delta \vec{p}_{\text{gaz}}}{\Delta t} = \Delta m \frac{\vec{u} - \vec{0}}{\Delta t} = \delta_0 \cdot \vec{u} \quad \left(\delta_0 = \frac{\Delta m}{\Delta t}\right).$$

D'après la loi de l'action et de la réaction, la fusée subit donc une poussée des gaz, $\vec{F}$, telle que :

$$\vec{F} = -\vec{f} = -\delta_0 \cdot \vec{u}.$$

A l'instant du décollage, la réaction $\vec{R}$ s'annulle; la fusée décollera si :

$$F > P \Rightarrow \delta_0 \cdot u > M_0 \cdot g \Rightarrow \delta_0 > (M_0 \cdot g)/u, \quad \text{soit}$$

$$\delta_0 > 61{,}25 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2° A l'instant du décollage :

$$\vec{F} + \vec{P} = M_0 \cdot \vec{a}$$

soit, après projection sur l'axe $\overrightarrow{y'y}$:

$$\bar{a} = \frac{-\delta \cdot \bar{u} + M_0 \cdot \bar{g}}{M_0} = -\frac{\delta \cdot \bar{u}}{M_0} + \bar{g}.$$

D'où $\bar{a} = -6{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

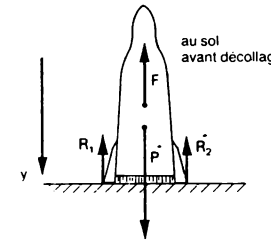


Fig. 14

3° Le débit étant constant, on peut écrire : $\delta = \Delta m/\Delta t$, soit : $\Delta t = \Delta m/\delta$. Lorsque tout le propergol a été utilisé, soit la masse $\Delta m = (8/10)M_0$, le temps qui s'est écoulé a partir du décollage est (cf. **fig. 14**) :

$$t_1 = \frac{(8/10)\,M_0}{\delta} = 120 \text{ s}.$$

Les réacteurs fonctionnent pendant 2 minutes. Pendant cette phase, la masse de la fusée à l'instant t est :

$$M(t) = M_0 - \delta \cdot t.$$

Son accélération est alors :

$$\bar{a}(t) = \frac{\bar{F} + \bar{P}}{M(t)} = \frac{\bar{F}}{M(t)} + \bar{g} = \frac{-\delta \cdot \bar{u}}{M_0 - \delta \cdot t} + \bar{g}.$$

A l'instant $t_1 = 120$ s, $M_0 = \delta \cdot t = 3.10^3$ kg et $a = -70{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

4° La vitesse, à l'instant t_1, est définie par la relation :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_1} = \bar{a}(t_1) \Rightarrow \bar{v}(t_1) = \int_0^{t_1} \bar{a}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit : $\bar{v}(t_1) = \int_0^{t_1} \left(\frac{-\bar{u} \cdot \delta}{M_0 - \delta \cdot t} + \bar{g}\right) \mathrm{d}t = \left[\bar{u} \cdot \ln(M_0 - \delta \cdot t) + \bar{g}t\right]_0^{t_1}$:

$$\bar{v}(t_1) = \bar{u} \cdot \ln(M_0 - \delta \cdot t_1) + \bar{g} \cdot t_1 - \bar{u} \ln M_0$$

$$= -\bar{u} \cdot \ln \frac{M_0}{M_0 - \delta \cdot t_1} + \bar{g} \cdot t_1;$$

$\bar{v}(t_1) = -2{,}69 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: cette vitesse très supérieure à celle du son ($340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

5° La trajectoire de la fusée sera alors parabolique ou rectiligne (selon l'orientation de $\vec{v}(t_1)$), la fusée étant alors uniquement soumise à l'action de la pesanteur et prend l'accélération $\vec{g}$.

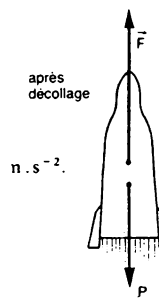


Fig. 15

5 MOUVEMENTS DANS UN CHAMP DE PESANTEUR UNIFORME

ÉTUDE GÉNÉRALE

1. Conditions de l'étude

Le mobile S est un solide de centre d'inertie G; la force qui agit sur lui est unique : c'est son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$.
On se place dans le cas où les autres forces dues à la présence de l'air (résistance de l'air; poussée d'Archimède) sont négligeables par rapport au poids. Les mouvements sont étudiés dans un repère lié à la terre; ce repère peut être considéré comme galiléen en première approximation : tout ce qui fait intervenir la rotation de la terre peut être négligé.

2. Application de la relation fondamentale de la dynamique

Dans un référentiel galiléen $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{g} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{V})}{dt} = m \cdot \vec{A}$$

$\vec{A}$; $\vec{g}$ et $\vec{V}$ sont relatifs au centre d'inertie G.

3. Équations du mouvement

Accélération : $\vec{A} = \vec{g}$, vecteur constant, de direction verticale, de sens vers le bas.
Vitesse : $\vec{V} = \vec{g} \cdot t + \vec{V}_0$, $\vec{V}_0$ vecteur vitesse à la date $t = 0$.
Position : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2 + \vec{V}_0 \cdot t + \overrightarrow{OM}_0$, $\overrightarrow{OM}_0$ vecteur position à la date $t = 0$.

MOUVEMENT RECTILIGNE

C'est le cas lorsque la vitesse initiale est nulle ou verticale. La trajectoire est alors verticale. Sur l'axe $(O, \vec{k})$ du référentiel galiléen, vertical, on aura un mouvement uniformément varié.
La projection de l'équation vectorielle sur cet axe vertical orienté conduit à une équation numérique du second degré en t qui a donc la plupart du temps deux solutions. Il conviendra donc de vérifier l'appartenance des solutions au domaine de définition de la fonction dont t est la variable.

MOUVEMENT PARABOLIQUE

1. Mouvement projetés

Les vecteurs $\vec{V}_0$ et $\vec{g}$ sont contenus dans le plan vertical (ZOX). Les axes OX et OZ du référentiel galiléen permettent l'étude du mouvement.
Les projections sur les axes OX et OZ conduisent à deux équations numériques, l'une du premier degré sur l'axe OX perpendiculaire au vecteur $\vec{g}$, l'autre du

second degré sur OZ. Sur l'axe OX, le mouvement projeté est uniforme et sur l'axe OY le mouvement projeté est uniformément varié.

2. Équation de la trajectoire

Dans le cas particulier où le mobile est lancé avec la vitesse $\vec{V}_0$ faisant un angle $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ avec $\vec{g}$, du point origine du repère O on peut écrire : $X = V_0 \cdot t \cdot \cos \alpha$ par projection de $\overrightarrow{OM}$ sur OX.

$$Z = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + V_0 \cdot t \cdot \sin \alpha$$

par élimination du temps entre les deux équations, on obtient :

$$Z = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g \cdot X^2}{V^2 \cdot \cos^2 \alpha} + X \cdot \tan \alpha$$

équation d'une parabole passant par O d'axe parallèle à OZ.

3. Énergie

Le travail du poids est indépendant du chemin suivi, il ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée. On peut donc définir une fonction énergie potentielle dont les variations sont

$$E_{PA} - E_{PB} = -m \cdot g(Z_B - Z_A).$$

Le poids étant une force conservative, l'énergie totale du système S + Terre est constante, l'énergie mécanique s'écrit

$$E_m = E_c + E_p$$

sa variation est nulle.

$$\Delta E_m = 0.$$

Soit

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + m \cdot g \cdot Z = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_0^2 + m \cdot g \cdot Z_0$$

$$V^2 - V_0^2 = -2 \cdot g \cdot (Z - Z_0).$$

EXERCICES

1. On lâche une bille sans vitesse initiale d'un point situé à 9 mètres du sol et que l'on prendra comme origine des abscisses, l'axe *Oz* étant orienté vers le bas.

a) Quelle est l'équation de son mouvement dans ce repère?

b) Quel temps mettra-t-elle pour arriver au sol?

$$g = 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Réponse : $z = \frac{1}{2} g \cdot t^2$; $t = 1{,}35$ s.

2. Combien de temps met un objet pour tomber d'une hauteur de 2 mètres

a) sur la Terre ($g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)?

b) Sur la Lune où l'accélération de la pesanteur est 6 fois plus faible que sur la Terre?

Réponse : *a*) $t = 0{,}64$ s; *b*) $t = 1{,}56$ s.

3. Un corps en chute libre le long d'un axe vertical $\overrightarrow{Oz}$ (orienté vers le bas) a une vitesse $v = 50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à l'abscisse 100 m. Déterminer la vitesse initiale puis la date correspondant à $z = 100$ m sachant que O est la position du mobile à l'instant initial $t = 0$. Envisager les cas d'une vitesse initiale vers le haut et vers le bas. ($g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.)

Réponse : $v_0 = 23{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $t = 7{,}32$ s, si $\bar{v}_0 > 0$ et 2,67 s si $\bar{v}_0 < 0$.

4. De quelle hauteur faut-il lâcher un corps sans vitesse initiale pour qu'il entre en contact avec le sol avec une vitesse $V = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Réponse : $V = g\cdot t$. La durée de la chute est $t = 1$ s. On a donc

$$z = \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2, \quad Z = 4{,}9 \text{ m}.$$

5. Un corps est lâché d'une hauteur $H = 6$ m au-dessus du sol avec une vitesse verticale $V = 4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Quelle durée met-il pour effectuer ce trajet dans les deux cas suivants :

a) la vitesse initiale est dirigée vers le bas;

b) la vitesse initiale est dirigée vers le haut.

Montrer que si, dans les deux cas, on prend pour origine des temps l'instant du passage par le point de départ, le mobile se déplaçant de haut en bas, la date d'arrivée sur le sol est la même.

Réponse : *a*) $6 = \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\cdot t^2 + 4\cdot t$; $t = 0{,}77$ s; la racine négative de l'équation n'appartient pas au domaine de définition. (Le solide ne peut arriver avant son départ!)

b) $6 = \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\cdot t^2 - 4\cdot t$; $t = 1{,}59$ s même remarque concernant la racine négative.

Le mobile repasse par le point de départ avec la même vitesse $V = 4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Le sens de la vitesse a changé. On se retrouve donc dans les conditions de *a*). Le mobile entre en contact avec le sol 0,77 s plus tard.

6. Un mobile est lâché sans vitesse initiale d'un point A 0,5 s plus tard on lâche sans vitesse initiale un second mobile.

La distance séparant les deux mobiles pendant leurs mouvements de chute reste-t-elle constante?

Réponse : non. Quand le second mobile part à la date $t = 0$ s le premier qui est déjà en mouvement possède une vitesse initiale. La distance qui les sépare est donc : $d = h + V_0\cdot t$; h étant la distance parcourue par le premier à l'instant du départ du second mobile et V_0 sa vitesse à ce même instant.

7. Un mobile est lancé d'un point O situé à 2 mètres du sol dans le champ de pesanteur terrestre avec une vitesse initiale horizontale de module $2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Déterminer dans un système d'axes que l'on précisera les coordonnées du point ou le mobile touche le sol ($g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$).

Réponse : repère $R(O, \vec{i}, \vec{k})$ $\vec{i}$ porté par $\vec{V}_0$, $\vec{k}$ vertical ascendant :

$$z = -\frac{1}{2}\frac{g\cdot x^2}{v_0^2} = -2 \Rightarrow x = 1{,}26\ \text{m}.$$

8. Une balle est lancée d'un point O avec une vitesse initiale inclinée sur l'horizontale de 30°, de module $2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et dirigée vers le bas; donner les équations du mouvement dans le système d'axe $(O, \vec{i}, \vec{k})$ ($g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. $\vec{i}$ horizontal dans le sens du mouvement, $\vec{k}$ vertical ascendant.

Réponse : $z = -\frac{1}{2}g\cdot t^2 - v_0\cdot t\cdot\sin\alpha = -5t^2 - t$; $x = v_0\cdot t\cdot\cos\alpha = 0{,}31t$.

9. Flèche. Une balle de ping-pong est lancée en O à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ de module $4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, faisant un angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$ avec l'horizontale Ox.

a) Quelle est la hauteur maximale atteinte (flèche)?

b) A quel instant cette hauteur est-elle atteinte? ($g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.)

Réponse : ***a***) *Première méthode :* Si z est maximale, E_p maximale, donc E_c et v minimales; d'après (1) v minimale $\Rightarrow \vec{v} = v_0\cdot\cos\alpha\cdot\vec{i}$ ($\vec{v}$ est horizontale).

$$E = \frac{1}{2}m\cdot v_0^2\cdot\cos^2\alpha + m\cdot g\cdot z_m = \frac{1}{2}m\cdot v_0^2 \Rightarrow z_m = \frac{v_0^2(1-\cos^2\alpha)}{2g}$$

$$z = \frac{v_0^2\cdot\sin^2\alpha}{2g} = \frac{16(1-0{,}25)}{20} = 0{,}6\ \text{m}.$$

Deuxième méthode : La hauteur maximale atteinte est l'ordonnée du point B où le vecteur vitesse de la balle est horizontale

$$\Rightarrow -g\cdot t + v_0\cdot\sin\alpha = 0, \qquad t = \frac{v_0\cdot\sin\alpha}{g};$$

en reportant cette valeur dans

$$(2') \Rightarrow z = \frac{1}{2}\frac{v_0^2\cdot\sin^2\alpha}{g} = 0{,}6\ \text{m}$$

(cette méthode est plus longue).

b) $t = \frac{v_0\cdot\sin\alpha}{g} = 0{,}2\ \text{s}.$

10. Portée maximum. Un projectile est lancé, sous un angle α avec l'horizontale, avec une vitesse $\vec{v}_0$ depuis un point O.

a) Déterminer l'abscisse du point A atteint par le projectile sur le plan horizontal passant par O (OA est la portée).

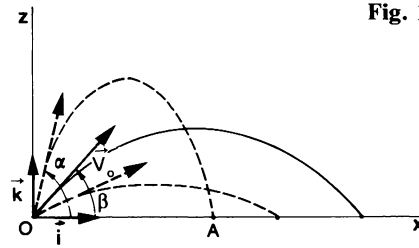


Fig. 1

b) Pour quel angle α cette portée est-elle maximale? La calculer.

Application numérique : $v_0 = 20\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Réponses : a) $\Rightarrow$ $\overline{OA} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2}{g} = 35{,}3$ m.

b) Si $\overline{OA}$ est maximal $\Rightarrow$ $\sin 2\alpha$ maximal, $\sin 2\alpha = 1$,

$$\alpha = \frac{\pi}{4}; \quad \overline{OA}_m = \frac{v_0^2}{g} = 40{,}8 \text{ m}.$$

PROBLÈMES

1. On lance une pierre vers le haut. Elle s'élève jusqu'à 9 m au-dessus de son point de départ. **1°** Quelle est la vitesse initiale de la pierre? **2°** Au bout de combien de temps repassera-t-elle par son point de départ? ($g \simeq 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.)

2. Deux billes A et B assimilables à des points matériels sont disposées sur une même verticale à 0,4 m l'une de l'autre, A étant au-dessus de B. A l'instant $t = 0$, on lâche A sans vitesse initiale. Quand A a parcouru 0,2 m, on lâche B sans vitesse initiale. Écrire les équations des mouvements de A et B en prenant pour origine des espaces le point de départ de A et pour origine des temps le moment de ce départ. A quel instant le choc entre A et B aura-t-il lieu? ($g \simeq 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.)

3. Une bille d'acier tombe verticalement à 2,94 m de l'objectif O d'un appareil photographique que l'on peut assimiler à une lentille mince de distance focale F = 14 cm. On éclaire la bille pendant sa chute par un stroboscope électronique donnant des éclairs très brefs tous les $1/10^e$ de seconde. Après développement sur la plaque, on observe des images dont les distances respectives à l'image extrême, A, sont AB = 0,98 cm, CD = 2,45 cm, AD = 4,41 cm, AE = 6,86 cm.
Calculer g (deux méthodes peuvent être employées).

4. Étude du coup franc direct en football. La balle est posée sur le sol horizontal à une distance D = 20 m du but. Le joueur, tirant le coup franc, donne à la balle une vitesse initiale $\vec{v}_0$ inclinée sur l'horizontale d'un angle $\alpha = 30°$. La balle, dont on néglige la rotation sur elle-même, suit une trajectoire curviligne. On néglige la résistance de l'air et l'influence du vent. On prend $g = 10$ unités SI.

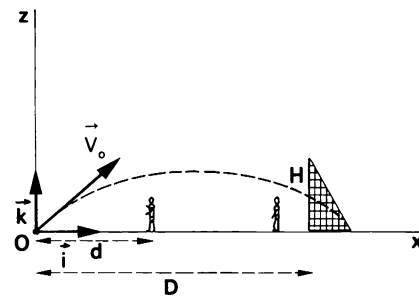


Fig. 2

1° Préciser la nature de la trajectoire de la balle.

2° A quelle condition $|\vec{v}_0|$ doit-elle satisfaire pour que la balle passe au-dessus du mur formé par les défenseurs adverses situés à $d = 9$ m de la position initiale de la balle? La hauteur des adversaires à dépasser est $h = 1{,}80$ m.

3° Entre quelles limites le module de la vitesse $\vec{v}_0$ doit-il être compris pour que la balle pénètre dans le but vide? La hauteur H du but est 2,44 mm.

4° Calculer la durée du tir, c'est-à-dire le temps qui sépare le départ de la balle de son entrée dans le but, pour les deux limites de la question précédente.

5. Un bombardier (A) vise un tank (B) en mouvement rectiligne horizontal qui évolue à une vitesse de 72 $km \cdot h^{-1}$. L'avion se met sur une trajectoire parallèle à celle du tank et, à la vitesse de 720 $km \cdot h^{-1}$, à une altitude de 500 m, dans le même sens que le char. Au moment où la bombe doit être larguée, il faut que l'opérateur chargé de la visée connaisse l'angle entre AB et la verticale; c'est là le problème de la visée (**fig. 3**).

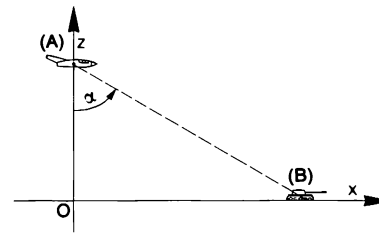


Fig. 3

Déterminer cet angle.
Déterminer la vitesse de la bombe au moment où elle est censée percuter son objectif ($g = 10$ $m \cdot s^{-2}$).

6. Un palet se déplace sans frottement sur une table à coussin d'air, parallèlement au plan de la table. Un dispositif produisant régulièrement des étincelles (flash) et fixé au palet permet de matérialiser par une série de points la trajectoire du centre d'inertie G du palet.
La distance entre deux points consécutifs est toujours parcourue en un temps $\theta = 0{,}02$ s. L'enregistrement (**fig. 4**) est reproduit à l'échelle 0,25.

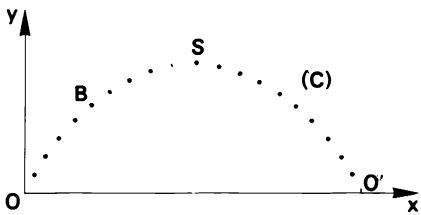


Fig. 4

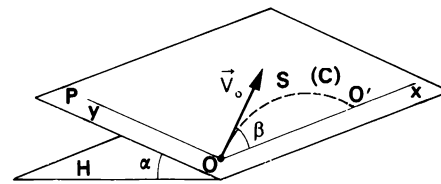


Fig. 5

Dans les applications numériques, on prendra l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}8$ $m \cdot s^{-2}$. Le plan P_t de la table est incliné d'un angle α sur le plan horizontal H. Le palet est lancé du bord de la table de sorte que la première

étincelle se produise lorsque G est en O à l'instant $t = 0$. La vitesse de G est alors $\vec{v}_0$ telle que $(\overrightarrow{Ox}, \vec{v}_0) = \beta$ **(fig. 5).**

1° Étude générale de la trajectoire (*C*) :

a) Soit les deux axes orthonormés de P_t, Ox horizontal et Oy suivant une ligne de plus grande pente de P_t. Montrer que les composantes selon ces axes de l'accélération du mouvement de G dans (P_t) sont $a_x = 0$ et $a_y = -g \cdot \sin \alpha$.

b) Exprimer en fonction du temps les composantes v_x et v_y de la vitesse $\vec{v}_G$ de *G*.

c) Établir l'équation $y = f(x)$ de la trajectoire (*C*) de *G* pour des valeurs quelconques de v_0, α et β.

d) Soit O' le point où cette trajectoire recoupe l'axe *Ox*. Exprimer la portée $x_p = OO'$ de la trajectoire ainsi que la durée du mouvement de *O* et *O'* en fonction de v_0, α, β et *g*.

2° Étude de l'enregistrement réel *E* de *C* (fig. 4).
Celui-ci a été réalisé avec $\alpha = 30°$ et $\beta = 60°$.

a) Utiliser l'enregistrement réel *E* pour mesurer la durée du mouvement de O à O' et en déduire la valeur numérique de v_0.

b) Déterminer numériquement l'instant de passage de G en B. Avec la valeur numérique de v_0 trouvée en ***a***), calculer les composantes v_{Bx} et v_{By} de $\vec{v}_B$. En déduire v_B.

c) A l'aide du théorème de l'énergie cinétique, calculer la différence d'altitude *h* entre les points B et O. Retrouver la valeur de $h = y_B \cdot \sin \alpha$ en mesurant y_B.

7. Un projectile est lancé d'un point O pris pour origine des espaces et des temps. La vitesse initiale $\vec{v}_0$ fait avec l'horizon un angle $\alpha > 0$. Rechercher l'ensemble des points de l'espace que l'on peut atteindre avec un projectile lancé de O avec une vitesse de module v_0 donné dans une direction quelconque.

SOLUTIONS

1. 1° *1re méthode :* utilisation de l'énergie. Si l'altitude de la pierre est maximum, son énergie potentielle est maximum puisque *E* est constante; $\frac{1}{2} m \cdot v^2$ est minimum c'est-à-dire nulle :

$$v = 0, \quad E = E_p = m \cdot g \cdot z_m = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot z_0; \quad v_0^2 = 2g(z_m - z_0).$$

2e méthode : puisque la vitesse initiale est positive et que l'accélération est négative, le mouvement est retardé puisque $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$: la vitesse décroît et s'annule pour

$$z = z_m \Rightarrow v^2 - v_0^2 = -2g(z - z_0) \Rightarrow v_0^2 = 2g(z_m - z_0).$$

Application numérique : $v_0 = 13{,}28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2° La pierre repasse par son point de départ si $z = z_0$, $v_0^2 = v^2$

$$\bar{v} = -v_0, \quad t = \frac{2v_0}{g}.$$

Application numérique : $t = 2{,}71$ s.

2. *Mouvement de* A : origine des espaces A, origine des temps : instant du départ de A.

$$z_A = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \left(\text{instant où A est en A' tel que } z_A = \frac{1}{2} g \cdot \theta^2 \Rightarrow \theta = 0{,}2s\right).$$

Mouvement de B : origine des espaces B, espace parcouru par B : Z; origine des temps, instant où A est en A' (le temps sera noté τ).

$$Z = \frac{1}{2} g \cdot \tau^2.$$

Nous faisons maintenant un changement d'origine pour respecter les origines imposées par l'énoncé qui sont celles du mouvement de A :

$$z = Z + AB; \quad \tau = t - \theta; \quad z_B = \frac{1}{2} g(t-\theta)^2 + AB.$$

Instant du choc entre A et B :

$$z_A = z_B \Rightarrow \frac{g}{2}(t-\theta)^2 + AB = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$t = \frac{\theta}{2} + \frac{AB}{g \cdot \theta} = 0{,}3 \text{ s}.$$

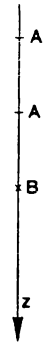


Fig. 6

3. Calculons les distances effectivement parcourues par la bille, l'objectif étant assimilable à une lentille mince les formules de conjugaison donnent :

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF}},$$

et le grandissement $\gamma = -\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

L'axe est orienté dans le sens de propagation de la lumière :

$\overline{OA'} = \dfrac{\overline{OF'} \cdot \overline{OA}}{\overline{OA} + \overline{OF'}} = 14{,}7$ cm $\Rightarrow |\gamma| = \dfrac{14{,}7}{294} = 0{,}05 \Rightarrow AB = a \cdot b \times \dfrac{1}{0{,}05}$, donc

$AB = a \cdot b \times 20$; $AB = 19{,}6$ cm; $BC = 29{,}4$ cm, $CD = 39{,}2$ cm, $DE = 49$ cm.

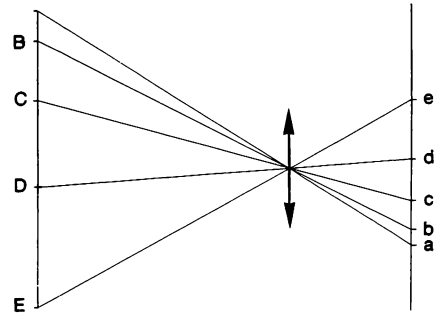


Fig. 7

1re méthode : utilisation de la raison de la progression; les distances précédentes ont été parcourues pendant des intervalles de temps $\theta = 0{,}1$ seconde. Ces distances sont en progression de raison $r = 9{,}8$ cm.

$$r = g \cdot \theta^2 \Rightarrow g = \frac{9{,}8\ 10^{-2}}{10^{-2}} = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2e méthode : calcul des vitesses par la vitesse moyenne

$$v_B = \frac{AB}{2\theta} = 2{,}45\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_C = \frac{BD}{2\theta} = 3{,}43\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_D = \frac{CE}{2\theta} = 4{,}41\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

v est une fonction affine du temps :

$$v = g \cdot t + v_0 \Rightarrow g = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4{,}41 - 2{,}45}{0{,}2} = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

4. 1° $\overrightarrow{OM} = \left(-\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t\right) \vec{k} + (v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha)\, \vec{i}$;

$$\overrightarrow{OM} = \left(-5t^2 + \frac{v_0}{2} \cdot t\right) \vec{k} + (0{,}866 v_0 \cdot t)\, \vec{i} \Rightarrow \begin{matrix} z = -5t^2 + \frac{v_0}{2} \cdot t, \\ x = 0{,}866 v_0 \cdot t \end{matrix}$$

$z = \frac{-20x^2}{3v_0^2} + 0{,}58x$, équation de la parabole.

2° Il faut que $z > 1{,}80$ m si $x = 9$ m $\Rightarrow \frac{-20 \cdot 81}{3v_0^2} + 0{,}58 \cdot 9 > 1{,}8$;

$$v_0^2 > 158 \Rightarrow v_0 > 12{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3° Pour que la balle pénètre dans le but vide, il faut que :

si $x = D$; $0 < z < 2{,}44 \Rightarrow 0 < \frac{-20D^2}{3V_0^2} + 0{,}58D < 2{,}44$;

$\Rightarrow$ soit : $v_0^2 > \frac{20D}{0{,}58 \cdot 3} = 229$ et $v_0 > 15{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

soit : $v_0^2 < \frac{20D^2}{3(0{,}58D - 2{,}44)} = 291$ et $v_0 < 17{,}1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

$v_0 > 15{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_0^2 < \frac{20D}{3 \cdot 9{,}16} \Rightarrow v_0^2 < 291$;

$v_0 < 17{,}1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $15{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} < v_0 < 17{,}1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4° Durée du tir : $x = 0{,}866 v_0 \cdot t$, avec $x = D$: $t = \frac{D}{0{,}866 v_0}$.

Si $v_0 = 15{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow t = 1{,}52$ s; si $v_0 = 17{,}1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow t = 1{,}35$ s.

5. L'origine des temps est prise à l'instant où le bombardier largue sa bombe; le repère d'étude est le repère (Oxz) lié au sol, O étant à la verticale du bombardier à l'instant initial.

A $t = 0$ pour le bombardier $x = 0$ et $z = OA = h$

pour le tank $x = x_0$ et $z = 0$

avec $\tan\alpha = \frac{x_0}{h}$.

Le mouvement du tank est rectiligne uniforme :

$$x_B = x_0 + v_B \cdot t.$$

Celui de la bombe est régi par les équations :

$$\text{A} \quad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{V} \begin{cases} v_x = v_A\,(\forall t) \\ v_z = -g \cdot t \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \begin{cases} x = v_A \cdot t \\ z = h - \dfrac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

la distance x_0 a été calculée — par l'angle de visée — pour qu'il y ait coïncidence entre la bombe et le tank au moment de l'impact : (à $t = \tau$), $z = 0$, et $x = x_B$.

Soit : $\dfrac{1}{2} g \cdot \tau^2 + h = 0$

$$x_0 + v_B \cdot \tau = v_A \cdot \tau \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{x_0}{v_A - v_B}.$$

On obtient facilement : $\tan \alpha = \dfrac{x_0}{h} = (v_A - v_B) \sqrt{\dfrac{2}{g \cdot h}}$.

Numériquement :

$$v_A = 720 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } v_B = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ et } h = 500 \text{ m}$$

$$\tan \alpha = 180 \sqrt{\frac{2}{10 \cdot 500}} = 3{,}6 \Rightarrow \alpha = 74{,}48°.$$

La vitesse de la bombe au moment de l'impact est :

$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$ pour $t = \tau$ $(z = 0)$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_A = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v_z &= -g \cdot \tau = -\sqrt{2g \cdot h} = -100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} v &= 100\sqrt{5} = 223{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \\ v &\simeq 805 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}. \end{aligned}$$

6. Référentiel $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{k}$ perpendiculaire au plan P_t.

1° Système : le palet, bilan des forces : $\vec{P}$, $\vec{R}$. Relation fondamentale :

$$\vec{P} + \vec{R} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{P} \begin{cases} 0 \\ -m \cdot g \cdot \sin \alpha; \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad \vec{R} \begin{cases} 0 \\ 0; \\ R \end{cases} \quad m \cdot \vec{a} \begin{cases} m \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ m \cdot \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ m \cdot \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} &= -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} &= R - m \cdot g \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Fig. 8

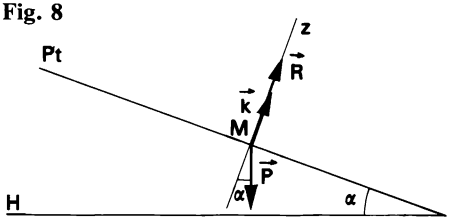
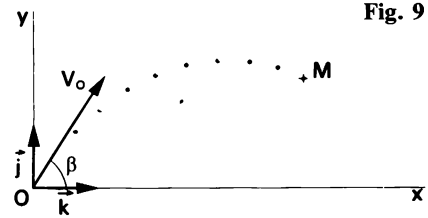


Fig. 9



a) $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \Rightarrow a_x = -0$, $a_y = -g \cdot \sin \alpha$.

b) $v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \cos \beta$, $v_y = \frac{dy}{dt} = -g \cdot t \cdot \sin \alpha + v_0 \cdot \sin \beta$.

Remarque : $m \frac{d^2z}{dt^2} = R - m \cdot g \cos \alpha = 0$ car le mouvement se fait dans le plan P_t par hypothèse. De plus : $m \frac{dz}{dt} = \text{Constante} = 0$, puisque $\vec{V}_0$ est dans P_t.

c) $x = v_0 \cdot t \cdot \cos \beta$;

$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 \cdot \sin \alpha + v_0 \cdot t \cdot \sin \beta \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{g \cdot x^2 \cdot \sin \alpha}{v_0^2 \cdot \cos^2 \beta} + \frac{x \cdot \sin \beta}{\cos \beta}$.

d) $x_p = OO' \Rightarrow y = 0$; $x_p = \frac{2v_0^2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta}{g \cdot \sin \alpha}$ $t = \frac{x_p}{v_0 \cdot \cos \beta} = \frac{2v_0 \cdot \sin \beta}{g \cdot \sin \alpha}$.

2° *a*) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$; $t = 0{,}4$ s $\Rightarrow v_0 = 1{,}13$ m·s^{-1}.

b) $v_{Bx} = v_0 \cdot \cos \beta = 0{,}56$ m·s^{-1};

$$v_{By} = -g \cdot t \cdot \sin \alpha + v_0 \cdot \sin \beta = 0{,}49 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_B = \sqrt{0{,}56^2 + 0{,}49^2} = 0{,}744 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c) $\frac{1}{2} m \cdot v_B = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = -m \cdot g \cdot h \Rightarrow h = \frac{1}{2g} (v_0^2 - v_B) = 0{,}036$ m.

Échelle 0,25 $\Rightarrow y_B = 1{,}7 \cdot 4 = 6{,}8$ cm, $h = 6{,}8 \cdot \sin 30° = 3{,}4$ cm $= 0{,}034$ m.

7. Soit $C(x_1, z_1)$ un point atteint par le projectile. Il satisfera à l'équation (3) :

$$z_1 = -\frac{1}{2} \frac{g \cdot x_1^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + x_1 \cdot \tan \alpha,$$

mais $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$.

Ordonnons en $\tan \alpha$;
l'équation précédente devient :

$g \cdot x_1^2 \cdot \tan^2 \alpha - (\tan \alpha) 2v_0^2 \cdot x_1 + 2z_1 \cdot v_0^2 + g \cdot x_1^2 = 0$.

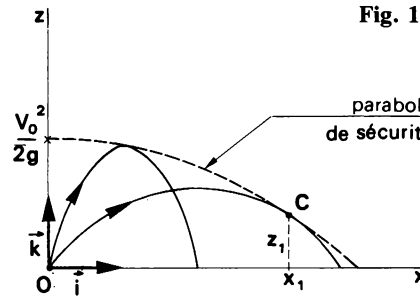


Fig. 10

Cette équation détermine l'angle α pour atteindre le point $C(x_1, z_1)$. Elle n'a de solutions que si $\Delta' \geqslant 0 \Rightarrow v_0^4 - (2z_1 \cdot v_0^2 + g \cdot x_1^2) g > 0$.

L'équation : $v_0^4 - (2z_1 \cdot v_0^2 + g \cdot x_1^2) g = 0$ sera la limite des points atteints. Elle peut s'écrire :

$$z_1 = \frac{v_0^4 - g^2 \cdot x_1^2}{2g \cdot v_0^2} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g \cdot x_1^2}{2v_0^2}.$$

C'est l'équation d'une parabole d'axe Oz dite parabole de sécurité. Si les points sont à l'extérieur, ils ne pourront être atteints (car $\Delta' < 0$). Cette parabole enveloppe toutes les paraboles correspondant aux différentes valeurs de α. La parabole de sécurité coupe l'axe des z au point $z = \frac{v_0^2}{2g}$ qui correspond au point atteint par un mobile lancé vers le haut avec une vitesse initiale verticale de valeur v_0.

INTERACTION GRAVITATIONNELLE

6

LOI D'ATTRACTION UNIVERSELLE

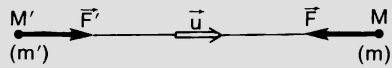


Fig. 1

1. Force d'attraction universelle (fig. 1).

Deux masses ponctuelles m et m' placées respectivement en M et M' exercent l'une sur l'autre une force attractive gravitationnelle.
La loi de Newton stipule que la force est proportionnelle aux masses et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

$$\vec{F}_{(M' \to M)} = -\vec{F}'_{(M \to M')}$$

$$\vec{F} = -K \frac{m \cdot m'}{r^2} \vec{u}.$$

K : constante d'attraction universelle;

$$K = 6{,}67\ 10^{-11} \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$$

$\vec{u}$: vecteur unitaire de M'M
r : distance M'M.

On admettra que l'action d'une sphère homogène sur des points matériels extérieurs est la même que si toute la masse était concentrée en son centre (fig. 2).

$$\vec{F} = -K \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}$$

$(r \geqslant R)$.

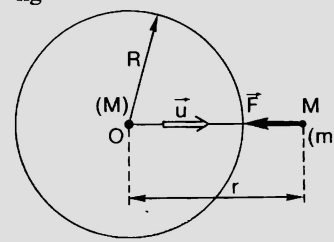


Fig. 2

2. Champ de gravitation

En tout point M où existe un phénomène de gravitation (créé par d'autres masses) on dit qu'il règne un champ de gravitation, caractérisé par le vecteur $\vec{G}$, appelé (vecteur) champ de gravitation en M. Par définition, toute masse m placée en M est alors soumise à une force gravitationnelle qui s'écrit :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{G}.$$

Ainsi (fig. 2), le champ de gravitation créé en M par la shère homogène de centre O et de masse M vaut :

$$\vec{G} = -K \frac{M}{r^2} \vec{u}.$$

3. Champ de gravitation terrestre et champ de pesanteur

La terre, comme tous les corps, est source d'un champ de gravitation. En l'assimilant à une sphère homogène de masse M_T, on voit que toute masse m placée au voisinage de la terre sera soumise à la force de gravitation :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{G}$$

avec $$\vec{G} = -K \cdot \frac{M_T}{(R+z)^2} \vec{u}$$

M_T : masse de la terre
R : rayon terrestre
z : altitude au niveau du sol
$\vec{u}$: vecteur unitaire de $\overline{OM}$, verticale du lieu.

Au niveau du sol ($z = 0$), on sait qu'une masse m est soumise à une force appelée **poids : $\vec{P}$** liée au **vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$** par :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

Tant qu'on néglige la rotation de la terre sur elle-même (*) le poids se confond avec la force d'attraction gravitationnelle terrestre et l'on aura :

$$\vec{g} \simeq \vec{G}.$$

En réalité $\vec{g}$ sera légèrement différent de $\vec{G}$, suivant la latitude du lieu;
— l'écart angulaire maximum (atteint pour une latitude de 45°) ne dépasse pas le $\frac{1}{10}$ de degré (l'écart est nul aux pôles et à l'équateur) :
le fil à plomb (direction de $\vec{g}$) **indique pratiquement la verticale du lieu** (direction de $\vec{G}$).
— l'écart en module est maximum à l'équateur ($g \leqslant G$) et nul aux pôles.

Variation de $\vec{g}$ avec l'altitude du lieu. Une faible variation d'altitude ayant peu d'influence sur $\vec{G}$ (en grandeur et en direction) on aura :
dans un espace restreint le champ de pesanteur est uniforme.

(*) Pour comprendre l'influence de la rotation propre de la terre sur $\vec{g}$ il faut se rappeler que le Principe Fondamental de la Dynamique doit s'appliquer dans un *repère galiléen*, ce qui n'est pas le cas d'un repère géodésique (lié à la terre) puisque ce repère possède un mouvement de rotation (entraîné par la terre) par rapport au *repère géocentrique* (issu du centre de la terre et dont les axes sont des directions stellaires fixes) qui peut être considéré comme galiléen (**).
Un point fixe sur la terre aura, par rapport au repère géocentrique, un mouvement circulaire uniforme de période égale à celle de la rotation de la terre sur elle-même, donc une accélération dite d'entraînement $\vec{A}_e$.
$\vec{g}$ est le champ de gravitation « apparent » c'est-à-dire vu dans le repère géodésique; on démontre que :

$$\vec{G} = \vec{g} + \vec{A}_e.$$

Ce sont les variations de $\vec{A}_e$ avec la latitude qui explique les variations de $\vec{g}$, $\vec{G}$ étant constant.

(**) En toute rigueur seul le repère de Copernic (issu du centre du système solaire) peut être considéré comme galiléen. Vu de ce repère, la terre possède une accélération correspondant à sa rotation autour du soleil. On démontre que le repère géocentrique peut être considéré comme galiléen à condition de ne plus tenir compte de l'attraction solaire, responsable de ce mouvement. L'effet résiduel de l'attraction solaire conjuguée à l'attraction lunaire est cependant responsable du phénomène des marées.

4. Énergie potentielle de gravitation

Dans le champ créé par la masse m placée en O l'énergie potentielle de la masse m' placée en M est :

$$E_p = -K \cdot \frac{m \cdot m'}{r}, \quad r = OM;$$

E_p ne dépend que de la position de M : la force de gravitation est conservative. En particulier le travail du poids d'un corps entre deux positions A et B est indépendant du chemin suivi entre A et B.

APPLICATIONS

1. Mouvement circulaire d'un satellite **(fig. 3)**

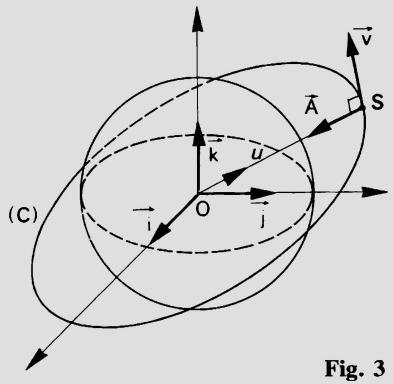


Fig. 3

Le satellite décrit un cercle de centre O (centre de la terre) et de rayon $r = R + z$. Dans le repère géocentrique $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j} \cdot \vec{k})$ le centre d'inertie du satellite est soumis à la résultante des forces gravitationnelles exercées par la terre sur chacun de ses points. Si les dimensions du satellite sont petites, comparées à la distance à la terre, ces forces se réduisent à une force unique (le champ $\vec{G}$ pouvant être considéré comme uniforme pour tout le satellite) :

$$\vec{F} = -K \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \vec{u} \equiv m \cdot \vec{A}_I \quad (r = OI)$$

L'accélération de I étant normale à la trajectoire, le mouvement est un mouvement circulaire uniforme.

Caractéristiques du mouvement

En introduisant la vitesse angulaire ω on aura :

— *Accélération :* normale, $A = K \cdot \frac{M_T}{(R+z)^2} = \omega^2(R+z) = \frac{v^2}{R+z}$

— *Vitesse :* $v = \omega(R+z)$.

On a aussi : $v^2 = A(R+z) = K \cdot \frac{M_T}{R+z}$; la vitesse est fonction décroissante de l'altitude.

En introduisant la pesanteur au sol : $g_0 \simeq G_0 = K \cdot \frac{M_T}{R^2}$, on aura aussi :

$$v^2 = \frac{g_0 \cdot R^2}{R+z}$$

— *Énergie :*

• l'énergie potentielle vaut : $E_p = -K \cdot \frac{M_T \cdot m}{R+z}$

• l'énergie cinétique vaut : $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} K \cdot \frac{M_T \cdot m}{R+z}$

• l'énergie mécanique vaut donc : $E_T = -\frac{1}{2} K \cdot \frac{M_T \cdot m}{R+z} = -E_C$

Troisième loi de Képler (*)

On a : $\omega^2 (R+z)^3 = K \cdot M_T$, indépendant de z et de la masse du satellite.

Et, en introduisant la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$;

$$\frac{T^2}{(R+z)^3} = \frac{4\pi^2}{K \cdot M_T}.$$

2. Impesanteur terrestre

L'état d'impesanteur est caractérisé par un *poids apparent nul.* Il se trouve réalisé quand l'attraction terrestre :

— *soit devient négligeable*, cas du vide interplanétaire (il faut que l'attraction des autres astres le soit également) et on parlera plutôt d'*apesanteur* ;

— *soit est équilibrée par une autre force réelle*, cas des expériences sur coussin d'air (sustentation) ou d'annulation par l'attraction lunaire;

— *soit est compensée par le mouvement d'entraînement du repère* dans lequel on veut réaliser l'état d'impesanteur (**).

(*) Les deux premières lois de Képler sont les lois régissant le mouvement des satellites (en fait, des planètes), suivant des trajectoires elliptiques, la trajectoire circulaire n'étant qu'un cas particulier seul traitable en classe de Terminales.

(**) L'explication est la même que pour la variation de $\vec{g}$ avec la latitude.
Si $(\mathcal{R})$ est le repère lié à un véhicule spatial — en son centre d'inertie — en mouvement par rapport au repère géocentrique $(\mathcal{R}_1)$ on démontre que le champ de pesanteur apparent en un point M du véhicule est égal à la différence entre le champ de gravitation créé par la terre en M et l'accélération de M dans son mouvement d'entraînement — par le véhicule — de rotation par rapport à $\mathcal{R}_1$; M étant, à l'échelle d'observation, toujours voisin de I, on aura :

$$\vec{G}\,(M) \simeq \vec{G}\,(I) \text{ et } \vec{A}_e\,(M) \simeq \vec{A}_e\,(I)$$

on voit que la condition d'impesanteur $\vec{G}\,(M) = \vec{A}_e\,(M)$ sera réalisée si l'on a $\vec{G}\,(M) = \vec{A}_e\,(I)$
donc seulement si le *véhicule est satellisé ou est en chute libre dans le vide.*
Il n'y aura jamais impesanteur en vol propulsif (poussée) ni en vol atmosphérique (résistance de l'air).
Si M est un peu éloigné de I et si, de plus, le véhicule a une rotation propre, il existera une pesanteur résiduelle due à l'effet de rotation du véhicule. Tant que la rotation restera lente il y aura quasi-impesanteur; par contre une rotation rapide permettrait justement de recréer une pesanteur artificielle.

1. Quelles forces gravitationnelles s'exercent entre deux boules de pétanque de 720 grammes placées à 1 mètre de distance?
Réponse : $F = 3{,}5\ 10^{-11}\ N$.

2. Calculer l'interaction de gravitation :
a) entre la Terre et la Lune;
b) entre la Terre et le Soleil (masse de la Terre : $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; masse de la Lune : $M_L = 7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg; masse du Soleil : $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg; distance Terre-Lune : $3{,}8 \cdot 10^{8}$ m; distance Terre-Soleil : $149 \cdot 10^{9}$ m.
Réponse :
a) $F = 2{,}0 \cdot 10^{20}$ N.
b) $F = 3{,}6 \cdot 10^{22}$ N.

3. Calculer l'interaction de gravitation entre le proton et l'électron de l'atome d'hydrogène, la distance moyenne entre l'électron et le proton étant $r = 0{,}53$ Å (masse de l'électron : $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ kg; masse du proton : $m_p = 1\,836\ m_e$. Comparer à la force électrostatique qui s'exerce entre les deux particules chargées ($q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; Constante de la loi de Coulomb : $1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^{9}$ SI).
Réponse : $F_G = 3{,}5 \cdot 10^{-47}$ N; $F_E = 8{,}2 \cdot 10^{-8}$ N; la force électrique est $2{,}3 \cdot 10^{39}$ fois plus grande!)

4. Deux points à la surface de la Terre sont distants de 1 852 m; quel est l'angle que font entre eux les vecteurs champ? Conclure ($R = 6{,}4 \cdot 10^{6}$ m).
Réponse : $\alpha \simeq 1' \simeq 3 \cdot 10^{-4}$ rad. Cette distance représente le mille marin.

5. Décroissance de g en fonction de l'altitude
Calculer l'intensité du champ de pesanteur g_z à l'altitude $z = 32\,000$ m. Quelle est la variation relative de g lorsque l'on passe du niveau du sol à l'altitude z? (g_0 au niveau du sol $= 9{,}81\ N \cdot kg^{-1}$; $R = 6\,400$ km). On utilisera $\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2 \sim 1 - 2\varepsilon$.
Réponse : $\vec{g}_{(z)} = -K \frac{M}{(R+z)^2} \vec{u}$, $\vec{g}_0 = -K \frac{M}{R^2} \vec{u}$; posant $\varepsilon = \frac{z}{R}$, on obtient $g_e = 9{,}71\ N \cdot m^{-1}$: $\frac{g_z - g_0}{g_z} \simeq -1\ \%$.

6. Calculer l'altitude d'un satellite en mouvement circulaire uniforme dont la période serait égale à celle de la rotation de la Terre sur elle-même. Préciser la trajectoire.
On donne $R = 6\,400$ km, $g_0 = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.
Réponse : on utilise la relation de Képler $\Rightarrow z \simeq 36\,000$ km; la trajectoire doit être dans le plan équatorial terrestre, décrite dans le sens de rotation de la Terre).

7. Calculer la vitesse et la période d'un satellite gravitant à l'altitude $z = 1\,600$ km sur une orbite circulaire.
Réponse : $V = 7{,}08\ km \cdot s^{-1}$; $T = 1\,h\,58$ min. $\simeq 2$ h.

Remarque. Il ne faut pas confondre cette période avec la période apparente du satellite (vu d'un point de la terre), qui est difficile à calculer dans le cas général, quand la trajectoire du satellite n'est pas dans le plan équatorial terrestre. Par contre, quand il en est ainsi, en appelant T' la période apparente du satellite (temps séparant deux passages consécutifs à la verticale du lieu) et θ la période de révolution de la terre, on aura une fréquence apparente égale à la différence des fréquences :

$$\frac{1}{T'}=\frac{1}{T}-\frac{1}{\theta} \Rightarrow T'=\frac{T\cdot\theta}{\theta-T};\ \text{ici } T'\simeq\frac{24}{22}\cdot T \simeq 2\text{ h }10\text{ min.}$$

C'est d'ailleurs ce raisonnement qui est appliqué pour trouver la position de l'orbite d'un satellite géostationnaire, pour lequel on impose $T=\theta$.

8. Un satellite artificiel de la Terre, supposé ponctuel, décrit une trajectoire circulaire à l'altitude $h=250$ km du sol. En prenant pour rayon de la Terre supposée sphérique $R=6\,400$ km, pour valeur du champ de pesanteur au sol $g_0=9{,}8\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$, pour valeur du champ de pesanteur à l'altitude h : $g\simeq g_0\left(1-\dfrac{2h}{R}\right)$, calculer le temps mis par le satellite pour effectuer un tour complet sur sa trajectoire.

Réponse : $T=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g_0}\left(1+\dfrac{3h}{2R}\right)}\simeq 1\text{ h }30\text{ min.}$

Même remarque que précédemment.

9. La Terre a une masse égale à environ 81 fois la masse de la Lune, la distance Terre-Lune étant d'environ 400 000 km. Déterminer le point, entre la Terre et la Lune, pour lequel les forces d'attraction terrestre et lunaire se compensent.

Réponse : Si x et y sont les distances respectives du point à la Terre et à la Lune ($x+y=400\,000$ km) on aura :

$$\frac{M_T}{x^2}=\frac{M_L}{y^2};\quad \text{soit}\quad \frac{x}{y}=\sqrt{81}=9;\quad x=\frac{9}{10}\cdot 400\,000\text{ km}\simeq 360\,000\text{ km.}$$

Remarquer que ce point est une région d'impesanteur et qu'il ne faut pas tenir compte de l'attraction solaire (qui est pourtant plus importante en grandeur!) parce que l'on étudie la position relativement au système Terre-Lune dont on sait qu'il est entraîné dans une rotation autour du Soleil, à cause justement de cette attraction solaire.

PROBLÈMES

1. La Terre tourne autour du Soleil en un an (365 jours). La masse de la Terre est égale à $6\cdot 10^{24}$ kg. On admet que le mouvement de la Terre autour du Soleil est circulaire uniforme et que la distance Terre-Soleil est 150 millions de kilomètres.

1° Calculer la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour du Soleil;

2° ***a***) Calculer la vitesse tangentielle de rotation de la Terre;

b) Calculer la distance parcourue par la Terre en un jour;

2. On donne : distance Terre-Soleil : D = 150 000 000 km; distance Terre-Lune : d = 380 000 km; masse du soleil $M_S=2\cdot 10^{30}$ kg.

1° Calculer l'intensité du champ de gravitation solaire G_S, créé par le Soleil au niveau de la Terre; montrer que c'est pratiquement l'intensité du champ créé par le Soleil au niveau de la Lune.

2° Calculer l'intensité du champ de gravitation terrestre G_T, créé par la Terre au niveau de la Lune (masse de la Terre : $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg).

3° La comparaison des deux résultats vous paraît-elle conforme avec l'opinion que la Lune est un satellite de la Terre?

3. A.C. Clarke est un écrivain réputé de science fiction doublé d'un excellent physicien. Dans un de ses romans il a repris l'idée sérieusement émise par d'autres physiciens d'un transporteur spatial, véritable ascenseur de l'espace, par amarrage d'un satellite à orbite circulaire basse. On obtient ainsi un « satellite » synchrone de basse altitude alors qu'une orbite géostationnaire d'un satellite libre exige un rayon de 42 000 km environ. Le rayon terrestre vaut 6 400 km.

1° On considère un satellite ainsi amarré par un câble de longueur 600 km : calculer, en n'utilisant que les données du problème, la pesanteur apparente régnant dans le satellite.

2° En admettant que le câble de cet ascenseur spatial est cylindrique, de diamètre 20 cm et de masse volumique $4 \cdot 10^3$ kg·m^{-3}, calculer la masse de ce câble. L'expérience vous paraît-elle réalisable?

4. La Lune tourne autour de la Terre, à une distance moyenne de 380 000 km.

1° Sachant qu'un satellite géostationnaire tourne autour de la Terre à une distance de 42 000 km, calculer la période de rotation de la Lune autour de la Terre.

2° Pourtant la période apparente de la Lune : temps séparant deux pleines Lunes, est de 29 j 1/2. Comment pouvez-vous expliquer cet écart? (Se rappeler que la Terre tourne autour du Soleil!)

5. Vitesse de libération. Quelle vitesse de lancement faut-il donner à une fusée partant de la Terre afin qu'elle puisse parvenir à une distance pratiquement infinie avec une vitesse nulle?

6. Par suite de frottements dans l'atmosphère raréfiée, l'énergie d'un satellite de masse 300 kg, placé à 400 km de la Terre, diminue de 1/100 de sa valeur, la trajectoire du satellite étant toujours circulaire :

1° Calculer la nouvelle valeur de son altitude.

2° Quelle est la variation relative de sa vitesse?

3° Quelles sont les variations de son énergie cinétique et de son énergie potentielle? Discuter les résultats obtenus.

7. On place un objet de masse m en un point de la Terre, à la latitude λ.

1° Déterminer, en fonction de Ω : vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même, R : rayon terrestre et λ : l'accélération d'entraînement par la Terre qu'il possède par rapport au repère géocentrique.

2° $\vec{G}$ étant le champ de gravitation en M, le champ de pesanteur en M est tel que :

$$\vec{g} + \vec{A}_e = \vec{G}_1.$$

Montrer sans calcul que

— $\vec{g} \equiv \vec{G}$ aux pôles

— $\vec{g}$ est colinéaire à $\vec{G}$ à l'équateur.

3° Plus généralement, en appelant α l'angle — très petit — que fait $\vec{g}$ avec $\vec{G}$ en un point de latitude λ, calculer cet angle et dire quand il est maximum.

Application numérique : $G = 9{,}83\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $R = 6\,400$ km. Quel est l'angle maximum?

4° De même calculer l'intensité : g, en fonction de G et de λ.

Application numérique : Calculer g à l'équateur.

Nota. — On se rappellera que $\sin\alpha \simeq \alpha$ et $\cos\alpha \simeq 1$, si α est petit.

SOLUTIONS

1. Le mouvement est étudié par rapport au référentiel de $(S, \vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$.

1° Vitesse angulaire de rotation de la Terre :

Le rayon vecteur ST tourne de 2π pendant une année soit :

$$365 \cdot 24 \cdot 3\,600 \text{ secondes;}$$

d'où la vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{2\pi}{3{,}153 \cdot 10^7} = 1{,}99 \cdot 10^{-7}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\simeq 2 \cdot 10^{-7}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

2° ***a)*** *Vitesse tangentielle :*

$V = R \cdot \omega \quad (R = ST)$

$V = 1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-7}$

$V = 3 \cdot 10^4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 30\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.

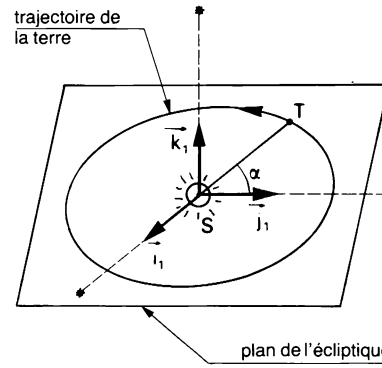


Fig. 4

b) *Distance parcourue en un jour :* calculons l'angle balayé par le rayon ST en un jour soit :

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow \alpha = \omega \cdot t = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 3\,600 \cdot 24 = 1{,}728 \cdot 10^{-2}\ \text{rad}.$$

Distance parcourue par la Terre :

$$s = R \cdot \alpha = 1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}728 \cdot 10^{-2} = 2{,}59 \cdot 10^9\ \text{m} = 2{,}59 \cdot 10^6\ \text{km}.$$

2. 1° Calcul du champ de gravitation solaire.

$$G_S = K \cdot \frac{M_S}{D^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 10^{30}}{(1{,}510^{11})^2} \simeq 6 \cdot 10^{-3}\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}.$$

Il est évident que le distance Terre-Lune est très faible devant la distance Terre-Soleil : $d \ll D$; par suite la distance Lune-Soleil vaut pratiquement D et G_S mesure aussi le champ de gravitation solaire au niveau de la Lune.

2° Calcul du champ de gravitation terrestre.

$$G_T = K \cdot \frac{M_T}{d^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{(3{,}8 \cdot 10^8)^2} = 2{,}77 \cdot 10^{-3}\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}.$$

3° On constate que l'attraction solaire sur la Lune vaut plus du double de l'attraction terrestre. Ce résultat semblerait plutôt signifier que la Lune — au même titre que la Terre — est satellite du Soleil!

Pour cette raison, les mécaniciens préfèrent considérer le système Terre-Lune comme une haltère dissymétrique, sorte de planète double tournant autour du Soleil : c'est le centre d'inertie de ce système qui décrit une orbite planétaire quasi circulaire, la Terre et la Lune tournant en même temps autour du centre d'inertie. Or, à cause de la masse beaucoup plus grande de la Terre (80 fois celle de la Lune), ce centre d'inertie est situé à 5 000 km du centre de la Terre (donc légèrement à l'intérieur de la sphère terrestre) : le mouvement de la Lune autour de ce point est donc perçu comme un mouvement autour de la Terre!

3. 1° Un satellite libre, sur une orbite circulaire, a une accélération centripète : $\omega^2 \cdot r$ (ω : vitesse angulaire, r : rayon) égale au champ de gravitation terrestre créé à cette distance.
Ainsi, pour le satellite géostationnaire — distance r_1 —, le champ de gravitation vaudra :

$G_1 = \omega^2 \cdot r_1$ (ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même).

A la distance r_2 — celle du satellite amarré —, le champ de gravitation étant inversement proportionnel au carré de la distance, on aura :

$$G_2 = G_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} = \omega^2 \cdot \frac{r_1^3}{r_2^2} \qquad \text{(centripète)}$$

Corrélativement, le satellite étant amarré, donc tournant avec la même vitesse angulaire ω, aura une accélération centripète :

$$A_2 = \omega^2 \cdot r_2.$$

(Si ce satellite était libre, il aurait une accélération beaucoup plus grande, donc une vitesse angulaire beaucoup plus grande; son accélération vaudrait G_2!).
La pesanteur apparente dans le satellite vaudra :

$$g_2 = G_2 - A_2 = \omega^2 \cdot \left(\frac{r_1^3}{r_2^2} - r_2\right).$$

Application numérique :

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ avec $T = 24 \text{ h} = 8{,}64\ 10^4 \text{ s}$;

$r_2 = 6\,400 + 600 = 7 \text{ km} = 7 \cdot 10^6 \text{ m}$.

$r_1 = 42\,000 \text{ km} = 4{,}2\ 10^7 \text{ m}$.

On trouve $g_2 = 4{,}3\ 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

2° Le volume du câble vaut :

$$V = \pi \frac{d^2}{4} \cdot l = \pi \cdot \frac{(0{,}2)^2}{4} \cdot 6 \cdot 10^5 = 18{,}85\ 10^3 \cdot \text{m}^3$$

et la masse :

$$m = \rho \cdot V = 75{,}4 \cdot 10^6 \text{ kg} = 75\,400 \text{ tonnes}.$$

Quoique énorme, le dispositif n'est pas impossible à réaliser. En fait il s'exercerait des tensions énormes dans le câble, ne serait-ce que par le jeu de la pesanteur, bien faible à une extrémité (on l'a vu) mais égale à la pesanteur au sol à l'autre extrémité : actuellement aucun matériau connu n'y résisterait!

Mieux même, des physiciens éminents pensent que, par le jeu des forces naturelles et notamment les effets luni-solaires, le câble serait soumis à des oscillations catastrophiques qui en provoqueraient la rupture.

4. **1°** Période de révolution de la Lune. On utilise la loi de Képler :

$$\frac{T^2}{r^3} = C^{te}.$$

Soit, puisque un satellite géostationnaire tourne en 1 jour, à une distance de 42 000 km, on aura, T étant exprimé en jours terrestres :

$$\left(\frac{T}{1}\right)^2 = \left(\frac{380}{42}\right)^3 \Rightarrow T \simeq 27{,}2 \text{ jours.}$$

2° Pour expliquer la différence entre cette valeur et la période de lunaison il faut se rappeler que dans le phénomène de pleine Lune (cf. **figure 5**), il y a alignement Soleil-Terre-Lune; on voit que, la Terre ayant tourné d'un angle θ, la Lune à la prochaine lunaison aura tourné autour de la Terre d'un tour complet augmenté de θ.
Il est facile de voir que la fréquence apparente du phénomène est égale à la différence entre la fréquence de rotation de la Lune autour de la Terre et la fréquence de rotation de la Terre autour du Soleil.
En appelant T_0 la période orbitale de la Terre ($T_0 \simeq 365$ j) on aura :

$$\frac{1}{T_{app}} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \Rightarrow T_{app} = T \cdot \frac{T_0}{T_0 - T}.$$

Application numérique :

$$T_{app} = 27{,}2 \cdot \frac{365}{365 - 27{,}2} = 29{,}4 \text{ jours.}$$

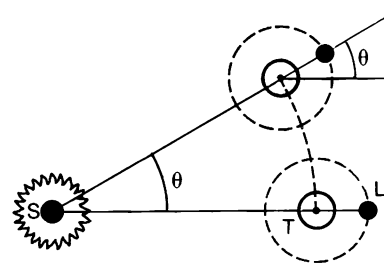


Fig. 5

La légère différence provient du fait que le calcul de T est approché, la valeur exacte étant de 27 j 1/3. De même $T_0 = 365$ j 1/4.

5. **Vitesse de libération.** D'après la conservation de l'énergie, on peut écrire : $E_{p_1} + E_{c_1} = E_{p_2} + E_{c_2}$ si l'on veut que la fusée arrive à l'infini avec une vitesse nulle E_{c_2} et $E_{p_2} = 0$, par convention, il vient : $E_{p1} + E_{c1} = 0$;

$$\frac{1}{2} m \cdot V^2 + (-m \cdot g_0 \cdot R) = 0; \quad \frac{1}{2} m \cdot V^2 = m \cdot g_0 \cdot R; \quad V = \sqrt{2 g_0 \cdot R}.$$

Application numérique :

$$V = \sqrt{2 g_0 \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6} = 1{,}12 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 11{,}2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Cette vitesse est appelée vitesse de libération. C'est la vitesse de la fusée par rapport à un référentiel géocentrique et non par rapport à un repère lié à la Terre.(*)

(*) Ce n'est pas la vitesse dans un repère géodésique, à cause — encore et toujours! — de la rotation de la Terre. A l'équateur la vitesse de rotation de la Terre vaut : $v = \omega^2 \cdot R \simeq 4{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; cette vitesse est tangentielle. Dans le repère géodésique local, la vitesse apparente de la fusée vaudrait : $\vec{V}_{app} = \vec{V} - \vec{v}$. Ici la différence est négligeable.

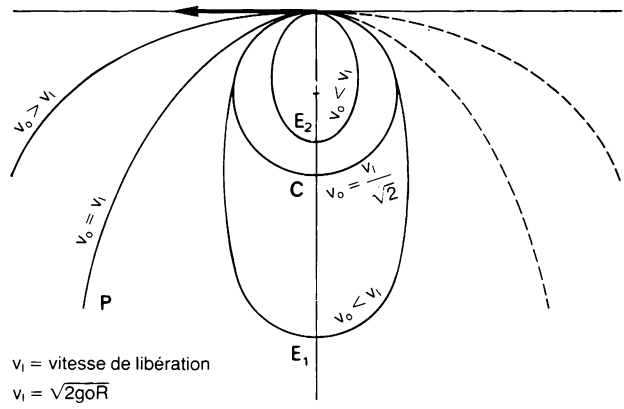


Fig. 6

Remarques (cf. **figure 6**)

— si la vitesse de la fusée est supérieure à la vitesse de libération, on démontre que celle-ci s'éloigne de la Terre vers l'infini en suivant une trajectoire hyperbolique;

— si la vitesse est inférieure, la fusée reste à distance finie sur une ellipse dont le centre de la Terre est un foyer;

— si la vitesse est égale à la vitesse de libération, la fusée s'éloigne vers l'infini en suivant une parabole.

6. 1° Nouvelle valeur de l'altitude

L'énergie mécanique vaut : $-\frac{1}{2} K \cdot \frac{M_T \cdot m}{R+z} = -\frac{1}{2} \frac{m \cdot g_0 \cdot R^2}{R+z}$ un calcul de petites variations donne :

$$\frac{\delta E}{E} = -\frac{\delta z}{R+z}, \quad \text{avec} \quad \frac{\delta E}{E} = 10^{-2} \Rightarrow \delta z = -(R+z) \cdot 10^{-2}.$$

(Remarquer que l'on a écrit $+10^{-2}$: en effet $\delta E < 0$ mais $E < 0$).

Application numérique : $\delta z = -(6400+400) \cdot 10^{-2} = -68$ km.

La nouvelle altitude vaut $z + \delta z = 400 - 68 = 232$ km.

2° Variation relative de vitesse

$$v^2 = \frac{K \cdot M_T}{R+z} = \frac{g_0 \cdot R^2}{R+z}.$$

Un calcul de petites variations donne :

$$2\frac{\delta v}{v} = -\frac{\delta z}{R+z} = \frac{\delta E}{E} = 10^{-2} \Rightarrow \frac{\delta v}{v} = 5 \cdot 10^{-3}.$$

La vitesse augmente, conformément au fait que l'altitude diminue.

3° Variations des énergies cinétique et potentielle

Énergie cinétique.

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \Rightarrow \frac{\delta E_c}{E_c} = 2\frac{\delta v}{v} = \frac{-\delta z}{R+z} = \frac{\delta E}{E} = 10^{-2}.$$

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{(6{,}4 \cdot 10^6)^2}{6{,}8 \cdot 10^6} = 89 \cdot 10^8 \text{ J} \Rightarrow \delta E_C = 89 \cdot 10^6 \text{ j}.$$

Énergie potentielle : Si on se rappelle que

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \frac{K \cdot M_T \cdot m}{(R+z)} = -E.$$

On sait que $E_p = E - E_c = -2E_c$.

Par suite : $\delta E_p = -2\delta E_c = -178 \cdot 10^6$.

7. 1° Accélération en M (cf. fig. 7 *a*)

Dans le mouvement de rotation autour de l'axe polaire, à la vitesse angulaire Ω, l'accélération de M est :

$$\vec{A}_e = \Omega^2 \cdot \overrightarrow{MI}$$

Soit $A_e = \Omega^2 \cdot MI = \Omega^2 \cdot R \cdot \cos \lambda$.

2° • Au pôle : $A_e = 0$ et $\vec{G} = \vec{g}$.

• A l'équateur : le parallèle de M se confondant avec le cercle équatorial, $\vec{A}$ a même direction que $\vec{G}$: $\vec{g}$ sera colinéaire à $\vec{G}$.

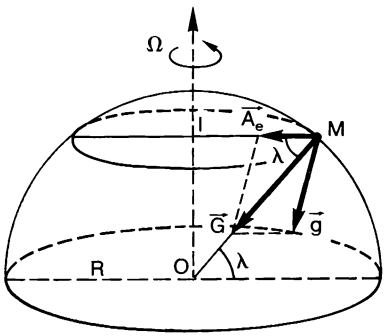


Fig. 7 *a*

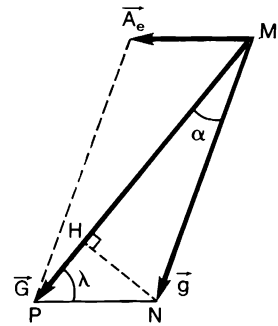


Fig. 7 *b*

3° cf. **fig. 7 *b*.**

$$\alpha \simeq \sin \alpha = \frac{NH}{MN} = \frac{PN}{MN} \cdot \sin \lambda = \frac{A_e}{g} \sin \lambda.$$

Soit : $\alpha = \frac{\Omega^2 \cdot R}{g} \cdot \sin \lambda \cdot \cos \lambda = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 \cdot R}{g} \cdot \sin 2\lambda.$

Mais puisque $G \simeq g$ ($A_e \ll G$), on aura pratiquement :

$$\alpha \simeq \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega^2 \cdot R}{G} \sin 2\lambda.$$

α sera maximum quand $\sin 2\lambda = 1 \Rightarrow 2\lambda = \frac{\pi}{2}$ et $\lambda = \frac{\pi}{4}$.

Application numérique :

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega^2 \cdot R}{G} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6}{(86\,400)^2 \cdot 9{,}83} \simeq 1{,}73 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \simeq \frac{1}{10} \text{ de degré.}$$

4° En projetant la relation vectorielle $\vec{g} + \vec{A}_e = \vec{G}$ sur MP, on a :

$$g \cdot \cos \alpha + A_e \cdot \cos \lambda = G.$$

soit $g \simeq G - A_e \cos \lambda = G - \Omega^2 \cdot R \cdot \cos^2 \lambda$.
(g est plus faible que G).

Application numérique : A l'équateur :

$$g = 9{,}83 - 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{6{,}4 \cdot 10^6}{(86\,400)^2} = 9{,}83 - 0{,}034 = 9{,}796 \cdot \mathrm{N} \cdot \mathrm{kg}^{-1}.$$

Remarque : En réalité, la valeur de g à l'équateur est légèrement différente de 9,796 $\mathrm{N} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$. La différence est due à un aplatissement de la Terre qui fait que le demi-axe polaire est de 21 km inférieur au rayon terrestre : l'intensité de gravitation G est légèrement plus faible à l'équateur qu'aux pôles. On retiendra cependant que l'on peut confondre avec une très bonne approximation $\vec{G}$ avec $\vec{g}$ et que le fil à plomb définit pratiquement la verticale d'un lieu.

7 MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP ÉLECTROSTATIQUE UNIFORME

RAPPELS D'ÉLECTROSTATIQUE

1. Force électrostatique (fig. 1)

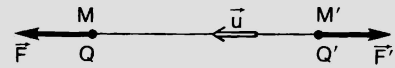
Deux charges électriques Q et Q' placées en M et M' exercent l'une sur l'autre une force électrostatique : répulsives si les charges sont de même signe, attractives si elles sont de signes contraires. La loi de Coulomb stipule que la force est proportionnelle aux charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

$$\vec{F}_{(M' \to M)} = -\vec{F}'_{(M \to M')}$$

$$\vec{F} = k \frac{Q \cdot Q'}{r^2} \vec{u}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \cdot \text{SI}$$

$\vec{u}$: unitaire de $\overrightarrow{M'M}$.
r : distance M'M.



cas $Q \cdot Q' > 0$

Fig. 1

2. Champ électrostatique

En tout point M de l'espace où se manifeste une force électrostatique on dit qu'il règne un champ électrostatique (créé par d'autres charges au repos) $\vec{E}$. Par définition, toute charge q placée en M subit une force électrostatique donnée par **(fig. 2)** :

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}.$$

Ainsi **(fig. 1)** le champ créé en M par la charge Q' vaut :

$$\vec{E} = k \cdot \frac{Q'}{r^2} \vec{u}.$$

Fig. 2

Le champ électrostatique est dit uniforme si en chaque point les vecteurs champs sont équipollents : dans ce cas, les lignes de champ sont des droites parallèles. On peut observer un tel champ entre deux plaques métalliques planes parallèles chargées d'électricité de signes contraires si leur dimension est grande par rapport à leur distance.

3. Différence de potentiel

Si on déplace une charge q dans un champ électrostatique d'un point A vers un point B le travail de la force électrostatique ne dépend que de ces deux points :

$$W_F = \int_{AB} q \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{dL} = q \int_{AB} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dL}.$$

On appelle différence de potentiel entre A et B, notée U_{AB} ou $(V_A - V_B)$, le rapport du travail à la valeur algébrique de la charge :

$$V_A - V_B = \frac{W_F}{q} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{L}.$$

La différence de potentiel s'appelle encore *tension* entre A et B : U_{AB}.

Dans le cas du champ électrostatique uniforme :

$$W_q = q\vec{E} \cdot \overrightarrow{AB} = q(V_A - V_B) \quad \text{et} \quad U_{AB} = (V_A - V_B) = \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Dans ces relations, les forces sont en Newton (N), les différences de potentiel en volt (V), les charges en coulomb (C) ; le champ électrique se mesure en volt par mètre ($V \cdot m^{-1}$).

MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP ÉLECTROSTATIQUE UNIFORME

Dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ une charge q est soumise à une force :
$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$; $\vec{F}$ et $\vec{E}$ ont même sens si $q > 0$ $\vec{F}$ et $\vec{E}$ de sens contraire si $q < 0$.
Cette charge de masse m est aussi soumise aux forces de pesanteur mais son poids $\vec{p} = \vec{m} \cdot g$ est très souvent négligeable devant la force électrostatique $\vec{F}$; il est toujours négligé dans le cas des particules fondamentales (électrons et protons).

La charge q soumise à la force $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ prend une accélération $\vec{A} = \frac{\vec{F}}{m}$, soit

$\vec{A} = \frac{q}{m} \cdot \vec{E}$.

$\vec{A}$ est toujours orienté dans le sens de la force $\vec{F}$.

1. *Accélération d'une particule*

La charge est mise en mouvement : celui-ci est rectiligne uniformément accéléré ; la variation de l'énergie cinétique de la particule est égale au travail de la force électrique :

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot V_B^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_A^2 = q\vec{E} \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$= q(U_A - U_B);$$
$$\Delta E_c = -\Delta E_p.$$

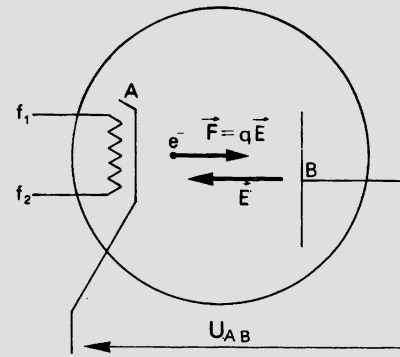


Fig. 3

2. *Déviation d'une particule en mouvement*

La charge q d'une vitesse initiale $\vec{V}_0$ est déviée par la force électrostatique $\vec{F}$ (souvent perpendiculaire à $\vec{V}_0$) : le mouvement est alors étudié sur deux axes Ox et Oy.

$\vec{V}_0$ est un vecteur directeur de Ox (vecteur unitaire $\vec{i}$).
$\vec{E}$ est un vecteur directeur de Oy (vecteur unitaire $\vec{j}$).

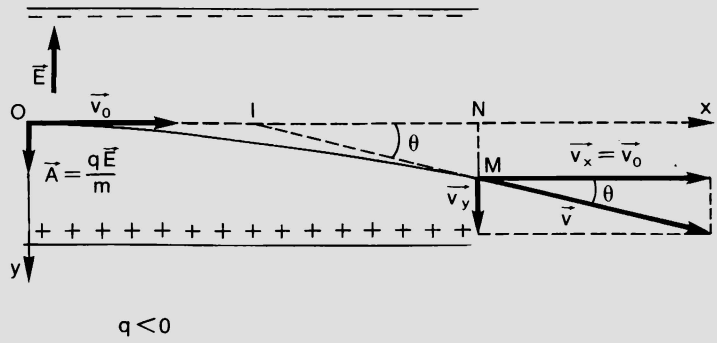


Fig. 4

A la date t : $\vec{V} = V_0 \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j}$, $V = \sqrt{V_0^2 + V_y^2}$.

La déviation de la particule, à cet instant, est θ tel que $\tan \theta = \frac{V_y}{V_0}$.

Sur l'axe Ox le mouvement est rectiligne uniforme : $X = V_0 \cdot t$.

Sur OY l'accélération est constante : $A = \frac{q}{m} \cdot E$.

La vitesse est donnée par : $V_y = A \cdot t$ si à $t = 0$ $V_y = 0$.

La projection de la position de la particule sur Oy est : $Y = \frac{1}{2} A \cdot t^2$ si $t = 0$, $Y_0 = 0$.

L'élimination du temps entre les deux équations donne l'équation cartésienne de la trajectoire; on reconnaît une parabole d'équation : $Y = \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot E}{m \cdot V_0^2} \cdot X^2$.

Remarque : on aura $\tan \theta = \frac{2Y}{X} \Rightarrow$ I est milieu de ON.

EXERCICES

1. Une charge positive $q = +3\text{nC}$ est placée dans un champ électrostatique uniforme $E = 5 \cdot 10^4\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$. Quelle est l'intensité de la force électrostatique qui s'exerce sur la charge q?
   Réponse : $F = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ N.

2. Un électron de charge $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, de masse $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg se trouve entre les armatures d'un condensateur plan chargé sous la différence de potentiel $U_{AB} = 100$ V. Les deux armatures sont distantes de $AB = 2$ cm. Comparer les intensités des forces électrostatiques et de pesanteur.
   Réponse : $m \cdot g = 9 \cdot 10^{-30}$ N; $F = \frac{|e| \cdot U_{AB}}{AB} = 8 \cdot 10^{-16}$ N; $\frac{F}{m \cdot g} = 8{,}9 \cdot 10^{13}$.

3. Un électron de charge $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C se déplace sous l'effet de la force électrostatique de A vers B (AB = 5 mm) dans un champ électrostatique uniforme $E = 10^5\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Quelle est la différence de potentiel U_{AB} et l'énergie reçue par cet électron?
Réponse : $U_{AB} = -500$ V. Énergie reçue $= +8 \cdot 10^{-17}$ J.

4. Un filament chauffé *ff'* émet des électrons par effet thermoélectronique. Ceux-ci sont accélérés par une différence de potentiel établie entre l'anode et le filament $U = +100$ V. L'anode est située à 1 cm du filament. Quelle est l'intensité du champ électrique supposé uniforme entre le filament et l'anode?
Quelle est l'énergie cinétique d'un électron arrivant sur l'anode?
Réponse : $E = \frac{U}{d}$, $E = 10^4$ V·m^{-1}; $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 = |q| \cdot U$; $E_c = 1{,}6 \cdot 10^{-17}$ J.

5. Dans une diode thermoémissive la tension filament plaque est 100 volts et l'intensité du courant anodique $i = 50$ mA. Quelle est l'énergie cinétique d'un électron arrivant sur la plaque? A quoi sert la donnée de l'intensité?
Réponse : $W = e \cdot U = 1{,}6 \cdot 10^{-17}$ J. La donnée de l'intensité permet de calculer le nombre d'électrons par seconde qui atteignent l'anode : $n = i/e = 3{,}12 \cdot 10^{17}$.

6. Un faisceau d'électrons homocinétiques de vitesse $V_0 = 20\,000$ km·s^{-1} traverse dans le vide le champ électrique uniforme entre les armatures d'un condensateur plan dont les deux armatures distantes de $d = 3$ cm longue de $L = 5$ cm et sont parallèles à la direction initiale du faisceau.
Quelle est la tension entre les armatures du condensateur si le faisceau subit une déviation de 5°?
Réponse : $\tan 5° = \frac{V_y}{V_0}$; $V_y = \frac{q}{m} \frac{U}{d} \frac{L}{V_0}$; $U = \frac{m \cdot d \cdot V_0 \cdot V_y}{q \cdot L}$; $U = \frac{m \cdot d \cdot V_0^2 \cdot \tan \theta}{q \cdot L}$,
$U = 118$ V.

7. Quel temps met un électron émis par effet thermoélectronique pour parcourir l'espace entre le filament et l'anode si la tension plaque est $U = 250$ V et la distance séparant ces deux électrodes $d = 5$ mm? L électron est supposé quitter le filament avec une vitesse nulle.
Réponse : $V = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m}}$ la vitesse moyenne est $V_{moy} = \frac{V}{2}$, le temps $= \frac{d}{V_{moy}}$,
$t = 10^{-9}$ s.

PROBLÈMES

1. Deux plaques métalliques planes et parallèles sont chargées sous une différence de potentiel $V_A - V_B = +5$ kV; ces deux plaques sont distantes de AB = 7 cm.
Quelle est l'intensité du champ électrostatique entre les deux plaques?
Quelle est l'énergie reçue par une charge $Q = -1$ μC qui quitte la plaque négative sans vitesse initiale pour rejoindre la plaque positive?
Quelle est la force agissant sur cette charge au cours du déplacement?

2. Un électron de vitesse $V = 2\,000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ pénètre dans un champ électrostatique $\vec{E}$ perpendiculaire au vecteur vitesse à l'entrée du champ. Après avoir parcouru 3 cm dans la direction de $\vec{V}$, il a dévié de 3 cm dans la direction opposée à $\vec{E}$.
Quelle est l'intensité du champ électrostatique E?

3. Dans un tube électronique un filament chauffé émet des électrons sans vitesse initiale, la tension entre le filament et la plaque est $U_{pf} = +250$ V.

1° Quelle est la vitesse des électrons à leur arrivée sur la plaque?

2° Quelle est leur énergie cinétique?

4. Dans un tube électronique le courant anodique est $i = 100$ mA, la tension entre l'anode et la cathode thermoémissive est $U_{pc} = 100$ V.

1° Combien l'anode reçoit-elle d'électrons par seconde?

2° La totalité de l'énergie cinétique des électrons étant transformée en chaleur au moment du choc, quelle énergie l'anode doit-elle évacuer par minute pour que sa température reste constante en régime permanent?

5. Dans un tube à vide la cathode thermoémissive et l'anode sont distantes de $d = 5$ mm. Les électrons émis sans vitesse initiale arrivent sur l'anode avec une vitesse $V = 6 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. En admettant que la force électrostatique qui les accélère reste constante pendant le trajet inter-électrodes, calculer le temps mis par un électron pour traverser l'espace interélectrodes.

6. Un faisceau de protons homocinétiques pénètre avec une vitesse $V = 2 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ perpendiculaire à $\vec{V}$. Après 10 cm de parcours dans la direction de $\vec{V}$, on remarque une déviation $\theta = 10°$ du faisceau par rapport à sa direction de propagation initiale.

1° Quelle est l'intensité du champ électrostatique E?

2° Quelle est la tension entre les armatures du condensateur plan produisant ce champ si la distance entre les deux armatures est $d = 5$ cm?

Application numérique : charge du proton $+e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, masse du proton $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

7. Dans un tube d'oscilloscope la vitesse des électrons en fin d'accélération est $V = 4 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Quelle est la tension d'accélération?
Ce faisceau d'électrons convenablement diaphragmé passe entre les armatures d'un condensateur plan distantes de $d = 1$ cm, longues de $L = 2$ cm. On suppose le champ électrostatique uniforme entre les armatures et nul à l'extérieur du condensateur. Celui-ci est disposé de telle sorte que le champ électrostatique E soit perpendiculaire à la vitesse V des électrons qui pénètrent dans le champ. On observe l'impact des électrons sur un écran cathodique situé à 20 cm de la sortie du condensateur.

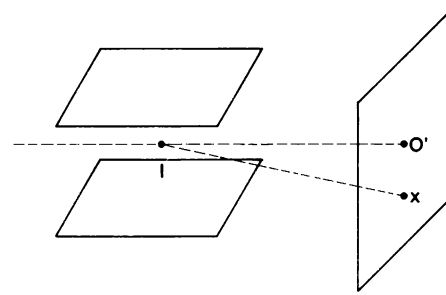


Fig. 5

1° Quelle est la tension U appliquée au condensateur qui produit un déplacement du spot de $x = 2$ cm sur l'écran cathodique?

2° Comment doit varier cette tension U pour que le spot se déplace à vitesse constante sur l'écran?

3° Ce spot effectue maintenant sur l'écran un mouvement rectiligne sinusoïdal d'amplitude $X_m = 4$ cm. A la date $t = 0$, il est au centre de l'écran en $X = 0$ avec une vitesse maximale positive. Donner l'expression de la tension U aux bornes du condensateur si la période du mouvement sur l'écran est $T = 0{,}25$ s.

SOLUTIONS

1. $U_{AB} = \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB}$: $E = \dfrac{5\,000}{7 \cdot 10^{-2}} = 7{,}14 \cdot 10^4$ V·m^{-1} orienté de B vers A. L'énergie reçue par la charge Q est égale au travail de la force électrique

$$W = Q \cdot U_{AB} : W = 5 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

Au cours du déplacement $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$; $F = 7{,}14 \cdot 10^{-2}$ N.
La charge est négative : $\vec{F}$ et $\vec{E}$ sont de sens contraire.

2. La déviation est de 45°, donc $V_y = V_x$, $\tan \theta = 1$.
La force électrostatique a agi pendant $t = \dfrac{L}{V_x}$, $t = \dfrac{3 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^6} = 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ s.
L'accélération de la charge dans la direction opposée au champ est :

$$a = \frac{q \cdot E}{m}.$$

La vitesse acquise dans cette direction est $V_y = a \cdot t$.
On a donc :

$$\frac{q \cdot E \cdot t}{m} = V_y, \quad E = \frac{m \cdot V_y}{q \cdot}, \quad E = \frac{9 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-8}}, \quad E = 750 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

3. 1° La diminution de l'énergie potentielle des électrons est égale à l'augmentation de leur énergie cinétique $\dfrac{1}{2} m \cdot V^2 = |q| \cdot U$:

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m}}, \quad V = 9{,}43 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2° Leur énergie cinétique est $|q|\,U$, soit 250 eV ou $4 \cdot 10^{-17}$ J.

4. 1° Par définition de l'intensité $i = \dfrac{|q|}{t}$ et $q = n \cdot e^-$:

$$i = 100 \text{ mA}, \quad q = 100 \text{ mC} \cdot \text{s}^{-1},$$

et donc $n = \dfrac{q}{e}$, $n = 6{,}25 \cdot 10^{17}$ électrons par seconde.

2° L'énergie cinétique d'un électron est $\frac{1}{2} m \cdot V^2$, chaque électron a une énergie $e \cdot U$.
L'énergie reçue en une seconde par la plaque est donc égale au produit $U \cdot i$ puisque $i = \frac{n \cdot e}{t}$ et ici $t = 1$ s,

donc : $W = 10$ J.

5. Si la force qui agit sur les électrons est constante, le mouvement est un mouvement uniformément accéléré donc la vitesse moyenne entre le filament et la plaque est égale à $\frac{V}{2}$ puisque la vitesse initiale est nulle.

On a donc $t = \frac{d}{V_{moy}}$, $t = \frac{2 \cdot d}{V}$: $t = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^6} = 1{,}67 \cdot 10^{-9}$ s.

6. 1° Quand on mesure la déviation de 10°, la force électrique a agi pendant $t = \frac{L}{V}$:

$$t = \frac{0{,}1}{2 \cdot 10^7} : t = 5 \cdot 10^{-9} \text{ s}.$$

La composante de la vitesse dans la direction du champ est alors : $\tan 10° = \frac{V_y}{V_x}$

$$V_y = 3{,}53 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Cette vitesse est acquise sous l'effet de l'accélération $a = \frac{q \cdot E}{m}$, $V_y = a \cdot t$

$$E = \frac{m \cdot V_y}{q \cdot t}, \quad E = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 3{,}53 \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}, \quad E = 7{,}37 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

2° Tension entre les armatures du condensateur : $U = E \cdot d$,

$$U = 3{,}68 \cdot 10^5 \text{ V}.$$

7. 1° Tension d'accélération telle que $V = 4 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. L'augmentation de l'énergie cinétique de l'électron est égale à la diminution de son énergie potentielle :

$$\left(\frac{1}{2} m \cdot V^2 - 0\right) + q\,(U_a - U_c) = 0.$$

$$(U_a - U_c) = \frac{-\frac{1}{2} m \cdot V^2}{q} \Rightarrow (U_a - U_c) = 4\,500 \text{ V}.$$

A la sortie du champ électrique le mouvement de l'électron est rectiligne uniforme, dans le champ la trajectoire est un arc de parabole. A la sortie du champ le mouvement se fait selon la vitesse à cet instant; la trajectoire suivie est donc tangente à la parabole en ce point.
Cette tangente coupe AA′ en son milieu M (voir **fig. 4**), la distance de M à l'écran est MO = 21 cm, la déviation du faisceau est donc θ tel que $\tan \theta = \frac{2}{21}$.

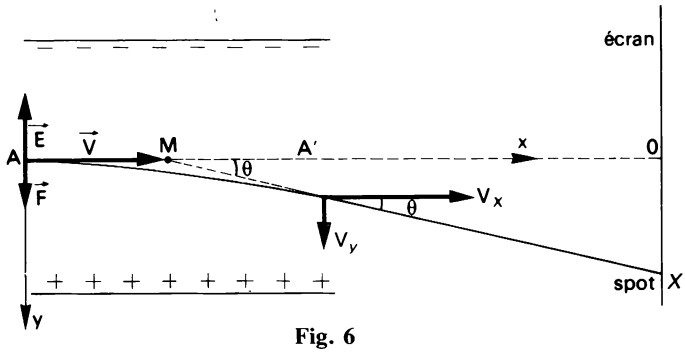


Fig. 6

Or la déviation s'exprime aussi par $\tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$.

Avec $V_y = \frac{q \cdot E \cdot t}{m}$, t étant la durée d'action du champ électrique soit $\frac{L}{V_x}$, le champ E étant lié à la tension par $E = \frac{U}{d}$, on a donc :

$$V_y = \frac{q \cdot \frac{U}{d} \cdot \frac{L}{V_x}}{m}; \quad \text{on a donc :} \quad U = \frac{V_x \cdot \tan\theta \cdot m \cdot d \cdot V_x}{q \cdot L}, \qquad U = 428 \text{ V}.$$

2° Soit X le déplacement du spot sur l'écran; si θ est petit, $\tan\theta = \frac{X}{21}$, X en cm. U est une fonction linéaire de X. Pour avoir un déplacement à vitesse constante sur l'écran, il faut que U soit une fonction linéaire du temps pendant la durée du déplacement.

Le mouvement du spot peut s'écrire $X = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$.

3° U étant proportionnel à X, $U = \lambda \cdot X$ avec

$$\lambda = \frac{V_x^2 \cdot m \cdot d}{21 \cdot q \cdot L}, \quad \lambda = 214,$$

on a donc $U = 214X$, X en cm :

$$U = 856 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right), \qquad U \text{ en volt};$$

$$U = 856 \sin(8\pi \cdot t).$$

8 CONDENSATEUR PLAN CAPACITÉ

Un condensateur est constitué de deux armatures conductrices séparées par un isolant appelé *diélectrique.*

1. Condensateur plan

Le condensateur est dit plan quand les armatures sont planes et parallèles : les lignes de champ sont les perpendiculaires communes aux surfaces en regard; le champ électrostatique est constant et la différence de potentiel entre les armatures vaut :

$$U = E \cdot e \qquad \begin{matrix} E \text{ champ électrostatique,} \\ e \text{ distance entre les armatures.} \end{matrix}$$

Lorsque le condensateur est chargé, une des armatures (celle qui se trouve au plus haut potentiel) porte la charge $+Q$, et l'autre la charge $-Q$.

2. Capacité d'un condensateur

La charge du condensateur est proportionnelle à la différence de potentiel entre les armatures :
$Q = C \cdot U$ Q en coulomb, U en volt et C en farad (symbole F).
C'est la capacité du condensateur. Elle dépend de la géométrie du condensateur et de la nature du diélectrique.

La capacité d'un condensateur plan est : $C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \dfrac{S}{e}$.

ε_0, permittivité du vide, valant $8{,}84 \cdot 10^{-12}$ S. I.
ε_r, constante diélectrique, caractérise le diélectrique ($\varepsilon_r = 1$ si le diélectrique est le vide et $\varepsilon_r \simeq 1$ si le diélectrique est l'air).
S surface des armatures en regard en m^2.
e épaisseur du diélectrique en m (très petite devant les dimensions des armatures).
Remarque : Le farad F est une unité bien trop grande, on utilise ses sous-multiples : le microfarad $1\ \mu F = 10^{-6}$ F, le nanofarad $1\ nF = 10^{-9}$ F, le picofarad $1\ pF = 10^{-12}$ F.

3. Groupement des condensateurs

— En parallèle : $C = \Sigma C_i$.
— En série : $1/C = \Sigma 1/C_i$.

4. *Énergie emmagasinée* par le condensateur chargé sous la tension U

$$E_c = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

EXERCICES

1. Deux plaques métalliques planes, de surface $S = 1\ m^2$, sont utilisées pour former un condensateur, l'épaisseur de la lame d'air entre les armatures valant 1 cm. Quelle est la capacité de ce condensateur? Même question quand on remplace la lame d'air par une lame de verre de même épaisseur ($\varepsilon_r = 5$).
   Réponse : $C = 884$ pF; $C' = 5C$.

2. Deux disques métalliques de rayon 10 cm sont utilisés pour former un condensateur. Quelle est la capacité si la distance entre les disques est de 0,1 cm? Que devient-elle pour une distance de 1 cm? L'isolant est en papier $\varepsilon_r = 2{,}5$.
   Réponses : $C = 695$ pF; $C' = 69{,}5$ pF.

3. Calculer l'énergie d'un condensateur de capacité $C = 10\ \mu F$ chargé sous une tension de 60 V. Quelle est sa charge?
   Réponses : $E_C = 18$ mJ; $Q = 6 \cdot 10^{-4}$ C.

4. Le champ maximal admissible dans l'air est $3\,200\ kV \cdot m^{-1}$. Quelles sont la tension et la charge maximales que peut recevoir un condensateur plan à air de capacité $C = 10\ \mu F$ dont les armatures sont distantes de 0,1 mm? Calculer la surface des armatures. Conclusion?
   Réponse : $U = 320$ V; $Q = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ C; $S = 36\pi \simeq 113\ m^2$: il faut un groupement en parallèle d'un grand nombre de condensateurs élémentaires!

PROBLÈMES

1. Dix condensateurs identiques, de capacité $C = 1\ \mu F$ chacun, sont chargés sous la tension $U = 100$ V. Un dispositif permet alors de passer instantanément du groupement en parallèle au groupement en série, l'armature négative d'un condensateur étant reliée à l'armature positive de son suivant. Quelle est alors la tension aux bornes de l'ensemble? Y a-t-il eu modification de l'énergie électrostatique? Justifier la réponse.

2. Un condensateur de capacité $C = 10\ \mu F$ est chargé par mise en contact avec les pôles d'un générateur de fem $E = 500$ V; pour que l'intensité du courant ne soit pas trop forte en début de charge, une résistance R est placée en série dans le circuit. Faire le schéma du circuit. Calculer l'énergie produite par le générateur et l'énergie reçue par le condensateur.
   On décharge ce condensateur en 10^{-4} secondes : quelle est la puissance moyenne dissipée pendant la décharge?

3. Un condensateur variable est formé de deux plaques métalliques séparées par une lame d'air d'épaisseur constante. L'armature A est fixe. L'autre armature (B) pivote autour d'un axe perpendiculaire aux deux plaques. Pour une position 1 des armatures, la capacité du condensateur est $C_1 = 3 \cdot 10^{-12}$ F.

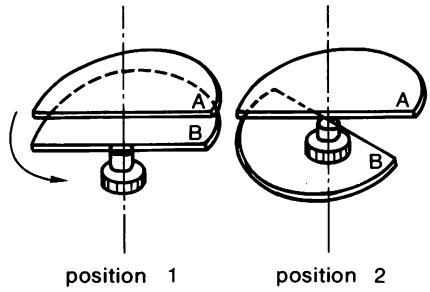


Fig. 1

1° On le charge sous une tension continue $U = 12$ V. Le condensateur est ensuite isolé du circuit de charge. On déplace l'armature mobile de sorte que, l'épaisseur d'air restant constante, l'aire des surfaces en regard soit divisée par 5 (position 2).
Pour les grandeurs suivantes : capacité, charge, tension et énergie emmagasinée, préciser celles qui ont varié en déterminant leur valeur avant et après le déplacement.

2° On désigne par α l'angle des parties des armatures en regard. Exprimer la capacité du condensateur en fonction de C_1 et de α.

4. Un condensateur de capacité $C = 10$ μF est chargé sous une tension de 1 kV; on relie ses armatures à celles d'un condensateur non chargé de capacité $C' = 2C$. A l'équilibre, calculer la tension aux bornes de chaque condensateur et la charge de chacun. Calculer également l'énergie électrostatique initiale et l'énergie finale. Interprétation.

5. Un condensateur de capacité 5 μF est chargé sous la tension de 1 000 volts; on l'associe alors à un condensateur non chargé de capacité $C' = n \cdot C$. Calculer l'énergie initiale, et donner en fonction de n l'énergie finale. Que se passe-t-il quand n devient très grand? Application numérique : $n = 2$, $n = 10$, $n = 100$.

6. Deux condensateurs de capacités $C_1 = 2$ μF et $C_2 = 4$ μF sont chargés sous les tensions respectives $U_1 = 200$ V et $U_2 = 100$ V : calculer la charge de chacun d'eux. On les associe en parallèle en reliant entre elles les armatures portant des charges de même signe : calculer la tension aux bornes du système, la charge finale de chaque condensateur et l'énergie finale de chacun.
Reprendre le même calcul lorsque l'on relie entre elles les armatures portant des charges de signes opposés.

7. Un condensateur est formé de deux disques métalliques plans de diamètre 30 cm séparés par une lame d'air d'épaisseur $e = 0{,}1$ mm. Quelle est sa capacité?
Ce condensateur est relié aux pôles d'un générateur de fem $E = 100$ V : calculer la charge et l'énergie reçues par le condensateur ainsi que l'énergie produite par le générateur.
Le condensateur restant relié au générateur, on modifie la distance entre les armatures, qui devient $e' = 10e$. Quelle est alors la tension aux bornes

du condensateur, sa charge, et le bilan énergétique de cette opération? Comment les résultats sont-ils modifiés si, au préalable, on a débranché le générateur? (Refaire le bilan énergétique.)

8. On charge un condensateur de capacité $C = 1$ µF par un courant d'intensité constante $I = 0{,}8$ mA. Lorsque la tension entre les armatures atteint la valeur $U = 4$ V, un dispositif électronique décharge, en un temps que l'on supposera négligeable, le condensateur dont la charge à courant constant reprend aussitôt.

1° Quelle est la période du cycle « charge, décharge » du condensateur?

2° On relie les armatures du condensateur, toujours muni du dispositif de charge et de décharge précédent aux bornes d'un oscillographe dont les réglages sont les suivants : 1 $V \cdot cm^{-1}$ pour la sensibilité verticale, 1 $ms \cdot cm^{-1}$ pour le balayage horizontal.
Représenter la courbe observée sur l'écran.

3° Sans modifier les réglages de l'oscillographe on utilise une autre source de courant constant délivrant l'intensité $I' = 2I$. Tracer sur le même graphique la nouvelle courbe observée à l'écran.

SOLUTIONS

1. En série, les tensions s'ajoutent : $U' = 10U = 1\,000$ V, et l'ensemble est équivalent à un condensateur unique de capacité $C' = C/10 = 0{,}1$ µF, de même charge Q' que la charge primitive de chacun des condensateurs. Comme il n'y a pas eu mouvement de charges, l'énergie est invariante, comme on peut facilement le vérifier en écrivant :

$$W = 10 \cdot Q \cdot U \quad \text{et} \quad W' = Q' \cdot U' \quad \text{avec} \quad Q' = Q.$$

Pour calculer cette valeur commune, on écrirait :

$$W = 10 \cdot (1/2) \cdot C \cdot U^2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

2. Une charge Q est débitée par le générateur qui maintient entre ses pôles une tension constante égale à E (en effet, en absence de toute indication supplémentaire, on doit admettre que ce générateur a une résistance interne nulle); l'énergie produite vaut (résultat général) : $W = Q \cdot E$.
A l'équilibre, il n'y a plus de courant et la tension aux bornes du condensateur chargé vaut rigoureusement $U = E$; la charge vaut donc $Q = C \cdot E$, et par suite l'énergie produite par le générateur vaut $W = C \cdot E^2$. Corrélativement, le condensateur a emmagasiné l'énergie $W' = (1/2) \cdot C \cdot E^2$, soit la moitié : le reste a été dissipé en effet Joule pendant la charge.
Numériquement : $W = 2{,}5$ J et $W' = 1{,}25$ J. On en déduit la puissance moyenne dissipée $P = W'/t = 12\,500$ W.

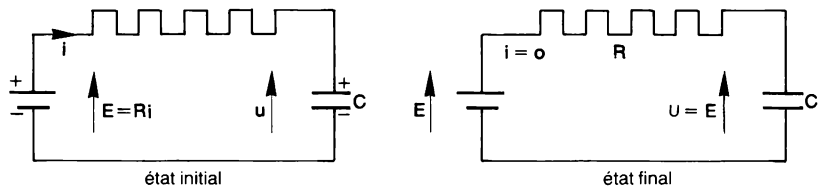


Fig. 2

3. **1°** La capacité d'un condensateur plan est $C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$.

Soit S_1 la surface initiale, $S_2 = \frac{S_1}{5}$ on en déduit

$$C_2 = \frac{C_1}{5} = 0{,}6 \cdot 10^{-12} \text{ F}.$$

Le condensateur étant isolé, sa charge ne change pas :

$$Q_1 = Q_2 = C_1 \cdot U = 3{,}6 \cdot 10^{-11} \text{ C}.$$

Comme $Q_2 = C_2 \cdot U_2$ on en déduit $U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = 60$ V ($U_2 = 5U_1$).

L'énergie emmagasinée dans le condensateur est $W_2 = \frac{1}{2} Q_2 \cdot U_2 = 1{,}08 \cdot 10^{-9}$ J.

Or $W_1 = \frac{1}{2} Q_1 \cdot U$ avec $Q_1 = Q_2$ et $U = \frac{U_2}{5}$ donc $W_2 = 5W_1$.

2° Dans la position 1 la surface des armatures en regard est $S_1 = \frac{\pi}{2} R^2$ (R rayon de l'armature).

Dans une autre position la surface des armatures en regard est $S = \frac{R^2}{2} \alpha$ (α en rad). On peut donc écrire :

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{\pi \cdot R^2}{2e} \text{ dans la position 1}$$

et

$$C = \varepsilon_0 \frac{R^2 \cdot \alpha}{2e} \text{ dans une autre position.}$$

Il vient $C = C_1 \frac{\alpha}{\pi}$. (*Application numérique :* $C = 9{,}55 \cdot 10^{-13} \alpha$.)

4. La charge initiale du condensateur C vaut $Q = C \cdot U \Rightarrow Q = 10^{-2}$ C. Cette charge se trouve maintenant répartie sur les deux condensateurs soumis à la même tension finale U' (cf. schéma).

$$\frac{q}{C} = \frac{q'}{C'} = (U') \quad \text{et} \quad q + q' = Q$$

$$q' = 2 \cdot q \Rightarrow q = 3{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ C} \quad \text{et} \quad q' = 6{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

et la tension vaut $U' = 333$ V.

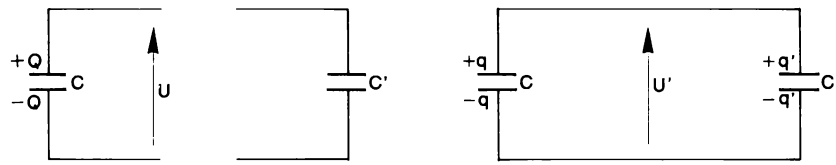


Fig. 3

L'énergie initiale vaut $W = (1/2) \cdot C \cdot U^2 = 5$ J, et l'énergie finale

$$W' = (1/2) \cdot (C + C')\, U'^2 \quad \text{soit} \quad W' = 1{,}67 \text{ J}.$$

Il y a eu un mouvement de charges entre les armatures des deux condensateurs dans les fils conducteurs, donc effet Joule. La diminution d'énergie entre l'état initial et l'état final représente la chaleur dissipée par effet Joule.

5. *État initial :* un condensateur C de charge Q sous la tension U, donc d'énergie $W = (1/2) \cdot C \cdot U^2$ (le schéma est identique à celui du problème précédent).

État final : la charge Q est répartie sur les deux condensateurs qui sont sous la tension commune U' :

$$q + q' = Q \quad \text{et} \quad U' = q/C = q'/C';$$

avec

$$C' = n \cdot C, \quad q = \frac{Q}{n+1} \quad \text{et} \quad q' = \frac{n \cdot Q}{n+1}$$

soit

$$U' = \frac{U}{n+1}; \quad \text{alors} \quad W' = (1/2) \cdot (C + n \cdot C)\, U'^2.$$

On trouve $W' = \dfrac{W}{n+1}$ avec $W = 2{,}5$ J : W' tend vers zéro quand n devient grand.

$n = 2$: $W' = 0{,}83$ J; $\quad n = 10$: $W' = 0{,}23$ J; $\quad n = 100$: $W' = 0{,}025$ J.

6. En appliquant la formule $Q = C \cdot U$, on obtient les charges initiales $Q_1 = 400$ µC et $Q_2 = 400$ µC (charges égales).
Dans l'état final, les condensateurs portent les charges respectives Q'_1 et Q'_2 sous la même tension U' :

$$U' = \frac{Q'_1}{C_1} = \frac{Q'_2}{C_2}$$

avec conservation de la charge totale :

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2.$$

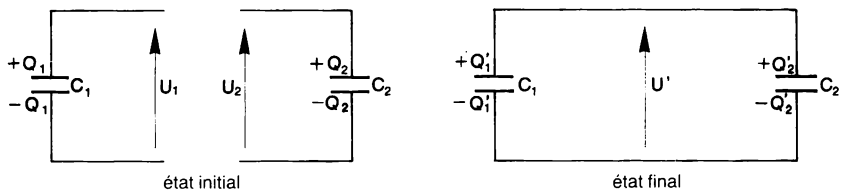


Fig. 4

Soit $Q'_2 = 2Q'_1$, $Q'_1 = 267$ µC et $Q'_2 = 534$ µC; on déduit $U' = 133$ V.
Enfin, en utilisant la formule $W = (1/2) \cdot Q \cdot U$ on trouve $W'_1 = 0{,}018$ J et $W'_2 = 2W'_1 = 0{,}036$ J.

• Si on relie les armatures de signes opposés entre elles, les charges (qui étaient primitivement égales) s'annuleront et le système ne sera plus chargé :

$$Q''_1 = Q''_2 = 0 \quad U'' = 0 \quad \text{et} \quad W'' = 0.$$

7. $C = \varepsilon_0 \cdot S/e = 6{,}25$ nF; en fin de charge $U = E$, donc

$$Q = C \cdot E = 6{,}25 \cdot 10^{-7} \text{ C}.$$

Le générateur fournit l'énergie $W' = Q \cdot E = 6{,}25 \cdot 10^{-5}$ J.
Le condensateur ne reçoit que l'énergie $W = 1/2 \cdot Q \cdot E$, soit moitié moins.

• Si le condensateur reste relié au générateur, sa tension reste constante, égale à E. Comme la capacité diminue quand e augmente, il s'ensuit que la charge diminue comme l'énergie du condensateur de manière inversement proportionnelle à e. Avec $e' = 10 \cdot e$, on a : $Q' = Q/10$ et $W' = W/10$, et le condensateur a donc restitué les $9/10^{e}$ de l'énergie qu'il avait reçue. Il est ici délicat de déterminer où cette énergie est allée sans faire des hypothèses sur la nature du générateur et sur la façon dont on a déplacé les disques : puisque la charge a varié, il y a nécessairement eu un courant transitoire qui est passé à travers le générateur!

• Si le condensateur est isolé, sa charge est maintenue constante (il n'y a pas de courant) en sorte que la tension augmentera proportionnellement à e : la capacité étant divisée par 10, la tension vaudra $U'' = 10 \cdot U$ et l'énergie $W'' = 10 \cdot W$. Ici, l'absence de courant de charge pendant l'opération permet d'affirmer que l'énergie supplémentaire acquise par le condensateur a été produite par l'expérimentateur pour qu'il puisse écarter les armatures.

8. **1°** Comme $q = I \cdot t$ et $q = C \cdot U$, on en déduit lorsque $U = 4$ V,

$$T = \frac{C \cdot U}{I} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 5 \text{ ms}.$$

2° La tension u entre les armatures est une fonction linéaire du temps t, entre $t = 0$ et $t = T$; $u = \dfrac{I}{C}\, t$ $(u = 800t)$ puis à $t = T$ la tension u s'annule.
La tension u est périodique de période $T = 5$ ms.
La courbe visualisée à l'oscillographe a une amplitude de 4 carreaux et une période de 5 carreaux.

3° D'après la question **1°** on peut écrire

$$T' = \frac{C \cdot U}{I'} = 2{,}5 \text{ ms}.$$

La tension u est une fonction périodique de période $T' = 2{,}5$ ms et d'amplitude identique à celle de la question précédente soit 4 V (voir **fig. 5**).

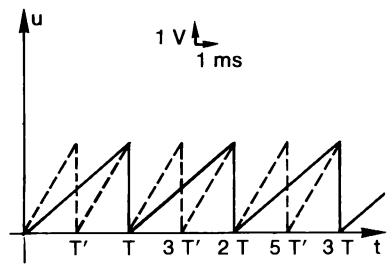


Fig. 5

PRODUIT VECTORIEL DE DEUX VECTEURS $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$

9

Soit un espace vectoriel à trois dimensions E_3 : deux vecteurs coplanaires linéairement indépendants $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont tels que

$$\lambda \cdot \vec{U} + \vec{V} = \vec{O} \quad \text{avec} \quad \lambda \neq 0 \quad \text{n'est possible que si} \quad \vec{U} \text{ et } \vec{V} = \vec{O}.$$

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ forment une base directe orthonormée de E_3.

Soit trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{X}$ de E_3 : il existe une forme linéaire qui à $\vec{X}$ associe $\text{Det}(\vec{U}\vec{V}\vec{X}) \in R$ et un vecteur $\vec{W}$ de E_3 tel que $\vec{W} \cdot \vec{X} = \text{Det}(\vec{U}\vec{V}\vec{X})$.

Calcul des composantes de $\vec{W}$:

$$\vec{U} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \qquad \vec{V} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} + z' \cdot \vec{k}$$

les composantes de $\vec{W}$ sur les axes sont : $\vec{W} \cdot \vec{i}$; $\vec{W} \cdot \vec{j}$; $\vec{W} \cdot \vec{k}$.

On a donc :

$$\vec{W} \cdot \vec{i} = \text{Det}(\vec{U}\vec{V}\vec{i})$$

$$\vec{W} \cdot \vec{i} = \begin{vmatrix} x & x' & 1 \\ y & y' & 0 \\ z & z' & 0 \end{vmatrix} = (yz' - zy')$$

$$\vec{W} \cdot \vec{j} = \text{Det}(\vec{U}\vec{V}\vec{j})$$

$$\vec{W} \cdot \vec{j} = \begin{vmatrix} x & x' & 0 \\ y & y' & 1 \\ z & z' & 0 \end{vmatrix} = -(xz' - x'z)$$

$$\vec{W} \cdot \vec{k} = \text{Det}(\vec{U}\vec{V}\vec{k})$$

$$\vec{W} \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} x & x' & 0 \\ y & y' & 0 \\ z & z' & 1 \end{vmatrix} = (xy' - x'y).$$

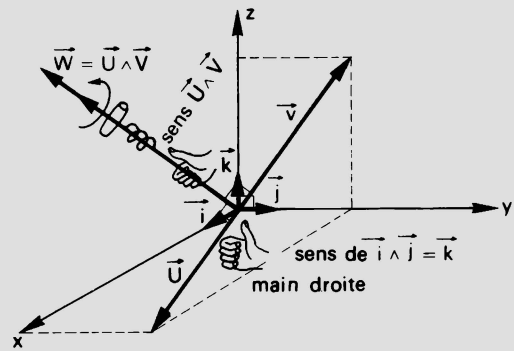


Fig. 1

On a donc :

$$\vec{W} = (\vec{W} \cdot \vec{i}) \cdot \vec{i} + (\vec{W} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{W} \cdot \vec{k}) \cdot \vec{k}.$$

Ce vecteur $\vec{W}$ est perpendiculaire à $\vec{U}$ et à $\vec{V}$; on peut vérifier $\vec{W} \cdot \vec{U} = 0$ et $\vec{W} \cdot \vec{V} = \vec{0}$.

Sa norme peut s'exprimer en fonction de $\| \vec{U} \|$, $\| \vec{V} \|$ et $\sin(\vec{U}, \vec{V})$

$$\| \vec{W} \| = \| \vec{U} \| \cdot \| \vec{V} \| \cdot |\sin(\vec{U}, \vec{V})|.$$

Elle représente l'aire du parallélogramme de côté $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

Le sens du vecteur $\vec{W}$ est donné par la règle du tire-bouchon : $\vec{W}$ est orienté selon le déplacement du tire-bouchon qui tourne de $\vec{U}$ vers $\vec{V}$ en parcourant l'angle inférieur à π.

PROBLÈMES

1. Soit deux vecteurs coplanaires $\vec{U}$ et $\vec{V}$ appartenant au plan $\vec{i}, \vec{j}$. Les coordonnées de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans un repère orthonormé $\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ sont :

$$\vec{U}\ (2, 2, 0) \quad \text{et} \quad \vec{V}\ (0, 2, 0).$$

Déterminer les composantes de $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$.
Construire $\vec{W}$ tel que $\| \vec{W} \| = \| \vec{U} \| \cdot \| \vec{V} \| \cdot |\sin(\vec{U}, \vec{V})|$ et l'orienter selon la règle du tire-bouchon. Vérifier l'identité des deux méthodes.
Vérifier l'orthogonalité de $\vec{W}$ et $\vec{U}$ et de $\vec{W}$ et $\vec{V}$.

2. Un mobile décrit une trajectoire circulaire de rayon $R = 1$ m d'un mouvement circulaire uniforme. Sa vitesse angulaire est $\omega = 2\pi$ rad·s^{-1}.
Quelle relation existe-t-il entre la vitesse tangentielle du mobile et sa vitesse angulaire? L'écrire sous forme vectorielle.
Quelle relation existe-t-il entre l'accélération centripète du mouvement, la vitesse angulaire et la vitesse tangentielle?

SOLUTIONS

1. Par définition : $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$

$$\vec{W} \cdot \vec{i} = \text{Det}(\vec{U}\vec{V}\vec{i}) \qquad \vec{W} \cdot \vec{i} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{W} \cdot \vec{j} = \text{Det}(\vec{U}\vec{V}\vec{j}) \qquad \vec{W} \cdot \vec{j} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{W} \cdot \vec{k} = \text{Det}(\vec{U}\vec{V}\vec{k}) \qquad \vec{W} \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

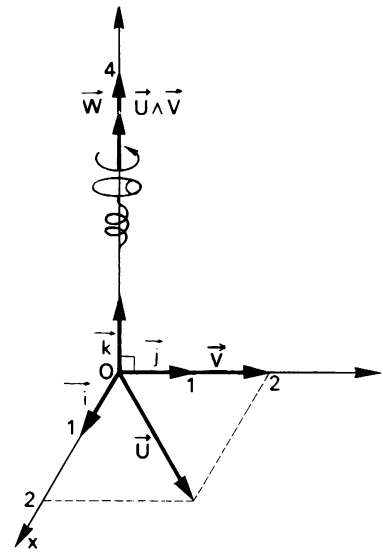


Fig. 2

On a donc : $\vec{W} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$.
W a pour norme 4 et est porté par l'axe $\vec{k}$ orienté dans le sens de k :

$$\| \vec{W} \| = \| \vec{U} \| \cdot \| \vec{V} \| \sin(\vec{U}, \vec{V}), \quad \| \vec{U} \| = 2\sqrt{2}, \quad \| \vec{V} \| = 2$$

$$\sin(\vec{U}, \vec{V}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \| \vec{W} \| = 4.$$

Un tire-bouchon qui tourne de $\vec{U}$ vers $\vec{V}$ en décrivant l'angle de 45° monte donc.
$\vec{W}$ est orienté dans le sens de $\vec{k}$ puisqu'il est perpendiculaire au plan $\vec{i}, \vec{j}$.
Les deux méthodes sont donc identiques.
$\vec{W} \cdot \vec{U} = 0$ et $\vec{W} \cdot \vec{V} = 0$. $\vec{W}$ est bien orthogonal à $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

2. $\vec{V}_p = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP} \Rightarrow \| \vec{V}_p \| = \| \vec{\omega} \| \ \| \overrightarrow{OP} \| \sin \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow V_p = 2\pi \cdot 1 \cdot 1 : V_p = 6{,}28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

$\vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{V}_p \Rightarrow \| \vec{a}_n \| = \| \vec{\omega} \| \ \| \vec{V}_p \| \sin \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow a_n = 2\pi \cdot 2\pi \cdot 1 : a_n = 39{,}48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

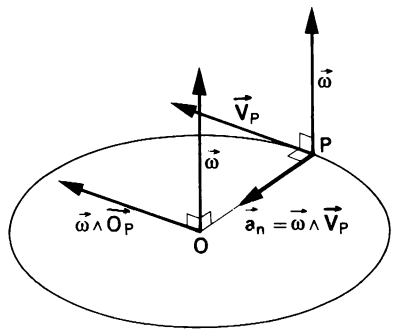


Fig. 3

10 MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME FORCE DE LORENTZ $\vec{F} = q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$.

1. On se propose d'étudier le mouvement de particules électrisées de vitesse $\vec{V}$ quand elles pénètrent dans une région de l'espace où l'on a produit un champ magnétique uniforme. Les particules se déplacent dans une enceinte où l'on a fait le vide. Expérimentalement, le faisceau peut être rendu visible par l'introduction dans l'enceinte d'un gaz sous faible pression : les molécules de ce gaz émettent de la lumière quand elles sont excitées par des électrons d'énergie E_c : cette traînée lumineuse visualise la trajectoire des électrons. La direction et le sens du champ magnétique sont donnés par une boussole.

• *Dans le cas particulier où la vitesse des électrons et le champ magnétique sont perpendiculaires, la trajectoire est un arc de cercle* ou un cercle complet suivant l'étendue du champ. Dans le champ magnétique les particules sont soumises à une force centripète $\| \vec{F} \| = \dfrac{m \cdot V^2}{R}$; cette force étant orthogonale au vecteur vitesse, la puissance mise en jeu par $\vec{F}$ est nulle :

$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{V} = 0$

$(\vec{F} \cdot \vec{V}) = \dfrac{\pi}{2}$ (rad).

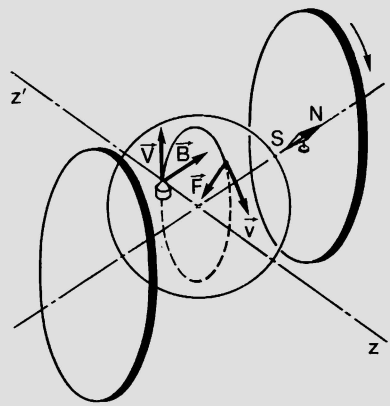


Fig. 1

Donc l'énergie cinétique des particules reste constante : le seul rôle de $\vec{F}$ est de courber la trajectoire.

• *Si le champ magnétique fait un angle quelconque avec le vecteur vitesse,* la trajectoire des électrons est une hélice.

2. Force de Lorentz

Toutes ces observations sont compatibles avec une loi de la forme :

$$\vec{F} = q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}.$$

En particulier, pour une trajectoire circulaire, l'accélération étant normale et valant : $A = \dfrac{V^2}{R}$ on aura :

$$m \cdot \frac{V^2}{R} = |q| \cdot V \cdot B \Rightarrow B = \frac{m \cdot V}{|q| \cdot R}.$$

Remarques.

B s'appelle champ d'induction magnétique. C'est la relation de Lorentz qui fixe l'unité de champ : le *tesla* (T).

EXERCICES

1. Des électrons homocinétiques de vitesse $V = 4 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ décrivent, dans un champ magnétique uniforme, un cercle de rayon $R = 1$ m. Quelle est l'intensité de ce champ magnétique? Charge de l'électron $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, masse de l'électron $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg.

Réponse : la trajectoire étant circulaire $\vec{V}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires.

$$B = \frac{m \cdot V}{q \cdot R} \qquad B = 2{,}25 \cdot 10^{-4} \text{ T}.$$

2. Une particule α est un noyau d'hélium $^4_2$He. Un faisceau homocinétique de ces particules pénètre à la vitesse $V = 20\,000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ dans une région de l'espace où un électroaimant produit un champ magnétique uniforme d'intensité $B = 1$ T perpendiculaire à leur vecteur vitesse. Quel est le rayon de la trajectoire décrite par ces particules?

Réponse : une mole d'hélium a pour masse 4 g. La masse d'une particule α est

$$m = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{\mathcal{N}} \text{ kg}, \qquad R = \frac{m \cdot V}{q \cdot B}, \qquad R = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^7}{6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} = 41{,}5 \text{ cm}.$$

3. Une particule a pour charge massique $\dfrac{q}{m} = 1{,}759 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$. Elle pénètre à la vitesse $V = \dfrac{c}{100}$, c désignant la vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans un champ magnétique uniforme B = 1 T perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{V}$. Quel est le rayon de la trajectoire suivie par ces particules dans le vide?

Réponse : $R = 17 \cdot 10^{-6}$ m. Ces particules décrivent un cercle assimilable à un point. La particule est pratiquement stoppée par ce champ, avec le temps sa vitesse va décroître et le cercle devenir de plus en plus ponctuel.

4. Un faisceau d'ions porteurs d'une charge q se déplace sur une trajectoire circulaire de rayon $R = 0{,}2$ m dans un champ magnétique uniforme $B = 0{,}02$ T. Quelle est la charge massique de ces particules si leur vitesse est $V = 38 \cdot 10^4$ m·s^{-1}?

Réponse : $\frac{q}{m} = \frac{V}{R \cdot B} \Rightarrow \frac{q}{m} = 9{,}5 \cdot 10^7$ C·kg

5. Un ion hydrogène de charge $q = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C de masse $m = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg traverse à la vitesse $V = 20\,000$ km·s^{-1} un champ magnétique uniforme d'intensité $B = 1$ T produit par un électroaimant. Les appareils sont disposés de telle sorte que $\vec{V}$ et $\vec{B}$ soient perpendiculaires. Quelle est la force qui agit sur cet ion? Sur quelle surface minimale doit s'étendre le champ pour que la particule soit piégée sur une trajectoire circulaire?

Réponse : la force qui agit sur cet ion est la force de Lorentz $\vec{F} = q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B} \Rightarrow F = 3{,}2 \cdot 10^{-12}$ N.
Cette particule décrit un cercle de rayon $R = 0{,}207$ m; il faut donc que le champ magnétique soit uniforme sur une surface supérieure à celle du cercle que peut décrire la particule, soit au minimum un cercle de surface $S = 1\,353$ cm^2.

6. Un aimant en U produit entre ses pôles un champ magnétique uniforme d'intensité $B = 0{,}01$ T. On l'utilise pour dévier un faisceau d'électrons homocinétiques de vitesse $V = 2 \cdot 10^6$ m·s^{-1}. Ces électrons peuvent-ils traverser l'entrefer de l'aimant? (la surface des pôles en regard étant assimilable a un rectangle de côté $l = 2$ cm, $L = 4$ cm). On suppose le champ magnétique nul à l'extérieur de cette surface.

Réponse : dans ce champ magnétique uniforme les électrons ont une trajectoire circulaire quand V est perpendiculaire à B de rayon

$$R = 1{,}125 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

La surface du cercle qu'ils décrivent est petite par rapport à celle où agit le champ magnétique. Il ne peuvent donc traverser l'espace entre les pôles de l'aimant.

1. Des électrons émis par effet thermoélectronique sans vitesse initiale sont accélérés par une différence de potentiel $U_{ac} = 1\,000$ V. Ils pénètrent dans un champ magnétique uniforme $B = 0{,}001$ T produit par des bobines de Helmholtz disposées de telle sorte que le vecteur champ magnétique et la vitesse des électrons soient perpendiculaires $\vec{B} \cdot \vec{V} = 0$. Charge de l'électron $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, masse de l'électron $m = 9.10^{-31}$ kg. Qu'est-ce que des bobines de Helmholtz? Quel est le rayon de la trajectoire suivie par les électrons?
   Comment varie le rayon de la trajectoire des électrons si on modifie la tension d'accélération U_{ac}? Comment varie le rayon de la trajectoire si on maintient U_{ac} constant et si on modifie l'intensité du courant dans les bobines de Helmholtz produisant le champ magnétique?

2. Quelle est la vitesse d'ions de masse m et de charge q qui se déplacent sans subir de déviation dans une région de l'espace où existent un champ électrique et un champ magnétique tels qu'en tous points les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ soient perpendiculaires? Les ions arrivent perpendiculairement au champ magnétique $\vec{B}$.
   Application numérique : $E = 2 \cdot 10^4$ V·m^{-1} : $B = 0{,}2$ T.

3. Des particules alpha sont émises dans une enceinte où l'on a fait le vide. On les soumet à l'influence d'un champ électrique $E = 10^5$ V·m^{-1} uniforme. Le champ électrique a même direction que le vecteur vitesse des particules. Que va-t-il se passer selon que les deux vecteurs sont de même sens ou de sens contraire? Vitesse initiale des particules $V_0 = 5 \cdot 10^6$ m·s^{-1}.
   Le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{V}_0$; au bout de combien de temps le faisceau est-il dévié de 45°? Quelle est alors la distance parcourue dans le champ dans la direction de $\vec{V}_0$?
   L'expérience est maintenant reprise le champ électrique étant remplacé par un champ magnétique $B = 0{,}02$ T produit par un électroaimant.
   Dans une première expérience $\vec{B}$ et $\vec{V}_0$ ont même direction. Que se passe-t-il selon que les deux vecteurs sont de même sens ou de sens contraire?
   Dans une seconde expérience $\vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{V}_0$: au bout de combien de temps le faisceau est-il dévié de 45°? Quelle est alors la distance parcourue dans le champ dans la direction de $\vec{V}_0$?
   Masse d'une particule alpha : $m = 6.65 \cdot 10^{-27}$ kg.

4. Les pôles d'un aimant sont assimilables à deux surfaces carrées de 2 cm de côté, parallèles, en regard l'une de l'autre. Le champ magnétique est uniforme entre les deux pôles ($B = 1$ m T) : on supposera qu'il est nul à l'extérieur de l'entrefer. Des électrons de vitesse $V = 2 \cdot 10^7$ m·s^{-1} pénètrent dans cette région perpendiculairement au vecteur champ magnétique. Leur vecteur vitesse est parallèle au côté du carré limitant la zone d'action du champ magnétique.
   Quelle est la déviation du faisceau à la sortie du champ?

5. On réalise le montage décrit ci-dessous :
   — un dispositif dit « bobines de Helmholtz » alimenté en courant continu;
   — entre les bobines de Helmholtz, une enceinte de verre contenant un gaz raréfié qui permet de rendre visible la trajectoire des électrons.

A l'intérieur de cette enceinte, on dispose d'une source d'électrons émis, dans la région du champ magnétique uniforme, perpendiculairement à l'axe des bobines. Donner l'expression de la force exercée sur une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique. En déduire les caractéristiques du mouvement des électrons (trajectoire et vitesse).
Un expérimentateur relève les données suivantes :
— tension accélératrice des électrons émis : $U = 140$ V;
— diamètre du cercle décrit par les électrons : $D = 9{,}5$ cm.
En déduire la valeur du champ magnétique.
On donne, pour l'électron, $|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-9}$ C et $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg.

6. Des ions de masse m et de charge positive q sont accélérés sous une tension U dans l'enceinte (E); certains d'entre eux passent par la fente S, ils sont alors animés de la vitesse $\vec{V}$ perpendiculaire au plateau SS'. Ils sont soumis à un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ à l'intérieur du dee (D) et arrivent en S'. ($\vec{B}$ est orthogonal à $\vec{V}$).

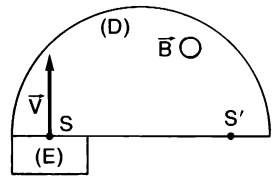


Fig. 2

1° Quel est le sens de $\vec{B}$?

2° Quelle est la distance $SS' = d$ en fonction des données? Application : $U = 1\,000$ V; $B = 1$ T. Il s'agit d'un ion Xénon : $^{130}X_e^+$.

3° Quelle est la distance qui sépare les deux points d'impact de deux isotopes $^{129}X_e^+$ et $^{132}X_e^+$ présents aussi dans l'échantillon de Xénon naturel?

7. Pour identifier les particules électrisées émises par un corps radioactif, on réalise l'expérience suivante. La substance émissive est placée dans le vide au fond d'un puits de plomb qui permet d'obtenir un faisceau étroit. La vitesse des particules est mesurée à l'aide d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{E}$ en tout point de l'espace. Les particules sont observées sur un écran fluorescent.
Montrer qu'il est possible d'annuler la déviation des particules dans un champ électrique $\vec{E}$ par un champ magnétique $\vec{B}$, déterminer, dans ces conditions, la vitesse des particules qui traversent les deux champs sans être déviées.
Application numérique : $E = 10^5$ V·m^{-1}, $B = 0{,}091$ T.
Ces particules non déviées lancées dans le champ électrostatique seul $E = 10^5$ V·m^{-1}, perpendiculaire à leur vitesse à l'entrée du champ, subissent une déviation dans le sens du champ de 2 cm après 10 cm de parcours dans la direction du vecteur vitesse à l'entrée du champ. Calculer la charge massique de ces particules. Quel est le rayon de la trajectoire qu'elles suivent dans le champ magnétique $\vec{B}$ seul?
Pouvez-vous identifier cette particule si une autre expérience a permis de déterminer leur charge électrique $q = +2 \cdot e$ avec $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C?

8. Un faisceau d'ions est formé d'ions néons de charge $+2 \cdot e$ de masse atomique 20 et d'ions isotopiques de masse atomique 22 ayant la même charge. Ces ions sont triés de façon à former un faisceau homocinétique d'ions de vitesse

V à l'aide d'un champ électrostatique $E = 10^5\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$ et d'un champ magnétique $B = 0{,}2$ T. Faire un schéma sur lequel vous préciserez les dispositions des vecteurs vitesse, champ électrostatique et champ magnétique rendant l'opération possible.
Quelle est la vitesse des ions ne subissant pas de déviation?
Ces ions passent à travers la fente fine d'un collimateur f et pénètrent dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire à leur vitesse $\vec{V}$ à l'entrée dans le champ en f. On rappelle : $B = 0{,}2$ T.
Quelle est la trajectoire de ces ions dans le champ magnétique? Que peut-on dire du vecteur vitesse de ces ions dans le champ magnétique?
Après avoir parcouru un demi-cercle dans le champ $\vec{B}$ perpendiculaire à leur mouvement, les ions impressionnent une plaque photographique sur laquelle on peut observer, après développement, deux points d'impact. Quelle est la distance séparant ces deux points d'impact?
Application numérique : nombre d'Avogadro : $\mathcal{N} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$;
charge de l'électron : $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

9. Un cyclotron est constitué de deux demi-boîtes circulaires creuses D placées dans le champ magnétique uniforme produit par un électroaimant $B = 1$ T.

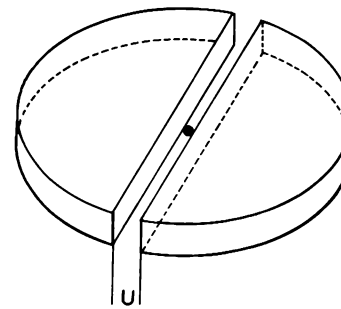


Fig. 3

Une particule électrisée décrit dans chaque D un demi-cercle à vitesse constante. Entre les deux D, un champ électrique appliqué au moment de la traversée de cet espace par les particules dans un sens convenable pour les accélérer augmente leur énergie à chaque demi-tour. La tension appliquée est $U = 100$ V. Quel est le rayon des trajectoires dans les D en fonction de la vitesse des particules, de leur charge, de leur masse et de l'intensité du champ magnétique? Montrer que le temps mis par une particule pour décrire un demi-cercle est indépendant de la vitesse de la particule. Quelle doit être la fréquence de la tension accélératrice si les particules sont des électrons de charge $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C et de masse $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg?
Quelle doit être la fréquence de la tension accélératrice si les particules sont des particules α de charge $+2 \cdot e$ de masse $m = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg?
Après combien de tours un électron devient-il relativiste? On admettra qu'alors $V \geqslant \frac{c}{3}$.
Le rayon des D étant $R = 0{,}5$ m, quelle est l'énergie maximale des particules α? Sont-elles relativistes?

1. On appelle bobines de Helmholtz l'ensemble formé par deux bobines plates de rayon R placée à une distance $d = R$. Quand ces deux bobines sont parcourues par des courants de même sens le champ magnétique est quasi uniforme dans l'espace limité par les bobines.
Les électrons ont une trajectoire circulaire de rayon r. Ils sont soumis à la force de Lorentz $\vec{F} = q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$, $F = q \cdot V \cdot B$. Cette force est égale à la force $\frac{m \cdot V^2}{r}$ caractérisant les mouvements circulaires.

Donc $$r = \frac{m \cdot V}{q \cdot B} \quad \text{avec} \quad V = 10^3 \cdot 600 \sqrt{U_{ac}}$$

$$V = 19 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad r = 0{,}107 \text{ m} \quad \text{ou} \quad r = 10{,}7 \text{ cm}.$$

V est proportionnel à $\sqrt{U_{ac}}$ et r est proportionnel à V donc r est proportionnel à la racine de la tension d'accélération.

r est proportionnel à $\frac{1}{B}$ et B est proportionnel à I, donc r est proportionnel à $\frac{1}{I}$.

2. Si les ions ne sont pas déviés par deux champs, l'un magnétique l'autre électrostatique, c'est que les forces magnétiques et électrostatiques sont opposées. On a donc :

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0}.$$

$$q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

soit $\vec{E} = -\vec{V} \wedge \vec{B}$;

tous les angles étant droits

$$\| \vec{V} \wedge \vec{B} \| = V \cdot B,$$

donc :

$$E = V \cdot B, \quad V = \frac{E}{B},$$

$$V = \frac{2 \cdot 10^4}{0{,}2} = 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

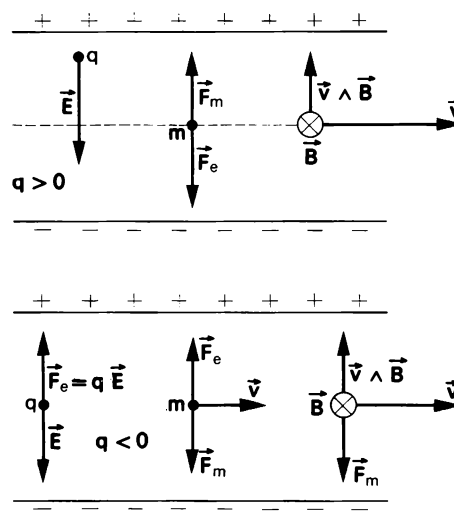


Fig. 4

3. Si le vecteur champ électrique a même sens que le vecteur vitesse, les particules α sont accélérées par la force électrostatique. Leur vitesse augmente :

$$\frac{1}{2} m \cdot V_f^2 - \frac{1}{2} m \cdot V_i^2 = q \cdot E \cdot L, \quad L = \text{distance parcourue dans le champ.}$$

Si le vecteur champ électrostatique est opposé au vecteur vitesse, la force $\vec{F}$ est une force de freinage. $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ opposée à $\vec{V}$:

$$\frac{1}{2} m \cdot V_f^2 - \frac{1}{2} m \cdot V_i^2 = -q \cdot E \cdot L.$$

Si le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire au vecteur vitesse, la trajectoire devient parabolique. Il existe une accélération constante perpendiculaire à la vitesse d'entrée dans le champ. Le faisceau sera dévié de 45° quand la composante du vecteur vitesse selon $\vec{E}$ sera égale à la vitesse d'entrée dans le champ.

$$a \cdot t = V_E = V_i, \quad V = \sqrt{V_i^2 + V_E^2}, \quad a = \frac{q \cdot E}{m}.$$

La distance parcourue dans le champ selon la direction $\vec{V}_i$ est $L = V_i \cdot t$.

On a donc :
$$\frac{q \cdot E}{m} \cdot \frac{L}{V_i} = V_i;$$

$$L = \frac{m \cdot V_i^2}{q \cdot E}, \quad L = \frac{6{,}65 \cdot 10^{-27} (5 \cdot 10^6)^2}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-9} \cdot 10^5} = 5{,}2 \text{ m}.$$

Si le champ magnétique fait avec $\vec{V}_i$ un angle égal à 0 ou π, la force de Lorentz est nulle, donc la particule ne subit aucune déviation : elle poursuit son mouvement rectiligne uniforme.
Si $\vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{V}_i$, la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{V}_i \wedge \vec{B}$ provoque un mouvement circulaire uniforme. La vitesse tangentielle de la particule est $\vec{V}_i$.

Le rayon de la trajectoire est : $R = \frac{m \cdot V}{q \cdot B}$, $R = 5{,}2$ m.

Si la particule a dévié de 45°, elle a parcouru $\frac{1}{8}$ de la circonférence du cercle, soit : $\frac{2\pi R}{8} = 4{,}08$ m parcourus à la vitesse $5 \cdot 10^6$ m·s^{-1}.
La durée de l'action du champ magnétique est donc :

$$t = \frac{4{,}08}{5 \cdot 10^6}, \quad t = 0{,}82 \text{ µs}.$$

4. La surface sur laquelle agit le champ magnétique est assimilable à un carré de surface $S = 4$ cm^2.
Des particules de vitesse V qui pénètrent dans ce champ perpendiculairement au vecteur champ magnétique sont soumises à la force de Lorentz $\vec{F} = q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$, elles décrivent alors une portion de trajectoire circulaire ou un cercle complet selon la courbure de leur trajectoire :
$R = \frac{m \cdot V}{q \cdot B}$.
$R = 0{,}11$ m. Ces électrons vont donc sortir de la zone où s'exerce le champ et poursuivre leur mouvement avec une vitesse $\| \vec{V}_f \| = \| \vec{V}_i \|$ telle que $(\vec{V}_i, \vec{V}_f) = \theta$, θ étant l'angle mesurant la déviation de l'électron.

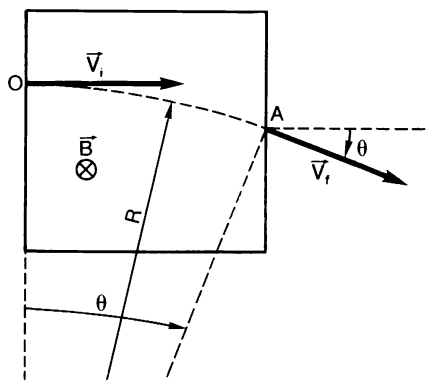


Fig. 5

Le champ agit sur 2 cm le rayon de la trajectoire de l'électron dans le champ étant 11 cm. On peut écrire : $\theta = \dfrac{OA}{R} = \dfrac{L}{R} = \dfrac{2}{11} = 0{,}18$ rad.

5. Les électrons sont soumis à la force de Lorentz $\vec{F} = q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$.
On observe une trajectoire circulaire quand les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires. Dans ce cas $F = q \cdot V \cdot B$. Au mouvement circulaire correspond une accélération centripète $a_n = \dfrac{V^2}{R}$. On a donc, en appliquant à l'électron le principe fondamental de la dynamique dans un repère extérieur fixe :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad \frac{m \cdot V^2}{R} = q \cdot V \cdot B, \quad V = \frac{B \cdot R \cdot q}{m}.$$

Les électrons sont produits par effet thermoélectronique, la tension d'accélération est $U_{ac} = 140$ V, $\Delta E_p + \Delta E_c = 0$;

$$q \cdot U_{ac} + \left(\frac{1}{2} m \cdot V^2 - 0\right) = 0, \qquad V = \sqrt{\frac{-2 \cdot q \cdot U_{ac}}{m}} \qquad V = 7{,}06 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Si le cercle trajectoire a pour diamètre $D = 9{,}5$ cm, le champ magnétique B est :

$$B = \frac{2 \cdot m \cdot V}{D \cdot q}, \qquad B = 0{,}84 \text{ mT}.$$

6. **1°** Il faut que le trièdre $(q\vec{V}, \vec{B}, \vec{f})$ soit direct (cf. schéma).
2° V est constant dans un champ magnétique uniforme. En effet $\vec{f} \cdot \vec{V} = 0$ $\forall t$, le travail élémentaire de la force de Lorentz est donc

$\delta W = \vec{f} \cdot \vec{V} \cdot \delta t = 0 \quad \forall t$

$\delta W = dE_c = 0 \Rightarrow E_c = C^{te} \Rightarrow V = C^{te}$,

l'accélération tangentielle est donc nulle.

$$A = A_N = \frac{V^2}{r}$$

$$A = \frac{f}{m} = \frac{q \cdot V \cdot B}{m} \qquad \Rightarrow r = \frac{m \cdot V}{q \cdot B} = C^{te}.$$

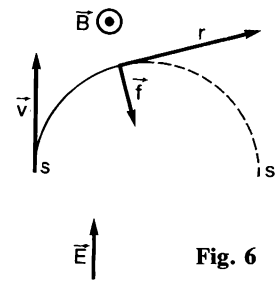


Fig. 6

On en déduit donc $d = 2r = \dfrac{2m \cdot V}{q \cdot B}$. Or, accélérés sous la tension U, les ions acquièrent la vitesse

$$V = \sqrt{\frac{2q \cdot U}{m}} \Rightarrow d = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2m \cdot U}{q}}.$$

Si $U = 1\,000$ V, $m = 130 \cdot m_p$ ($m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) et $B = 1T$, $q = |q_e| = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C :

$$d = 2 \sqrt{\frac{2 \times 130 \times 1{,}67 \times 10^{-27} \times 10^3}{1{,}6 \times 10^{-19}}} = 0{,}1042 \text{ m},$$

$$d = 1\,042 \text{ mm}.$$

3° A étant le nombre de masse du noyau de Xénon on peut écrire $m \simeq Am_p$

$$d = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2A \cdot m_p \cdot U}{q}} = \alpha \cdot \sqrt{A}$$

en posant $\alpha = \dfrac{2}{B}\sqrt{\dfrac{2m_p \cdot U}{q}}$

$$\alpha = 2\sqrt{\frac{2 \times 1{,}67 \times 10^{-27} \times 10^3}{1{,}6 \times 10^{-19}}} = 9{,}14 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

La distance cherchée est $x = d_2 - d_1$

$$x = \alpha\left(\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}\right) = 9{,}13 \times 10^{-3}\left(\sqrt{132} - \sqrt{129}\right) = 1{,}20 \times 10^{-3} \text{ m,}$$

$$x = 1{,}2 \text{ mm.}$$

7. Dans un champ électrostatique uniforme une particule de charge q est soumise à une force électrostatique $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Il en résulte une accélération dans le sens du champ $\vec{E}$ si $q > 0$ et une déviation. Pour annuler cette déviation, il faut produire une force $\vec{F}'$ opposée à $\vec{F}$ au moyen de l'interaction de la particule de vitesse $\vec{V}$ avec un champ magnétique $\vec{B}$

$$\vec{F}' = q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}.$$

Dans ce cas : $\vec{F} + \vec{F}' = \vec{0}$;

$$q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B} = \vec{0}, \quad \vec{E} = -\vec{V} \wedge \vec{B}, \quad \|\vec{E}\| = \|\vec{V}\| \cdot \|\vec{B}\|,$$

$$V = \frac{E}{B}, \quad V = 1{,}1 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

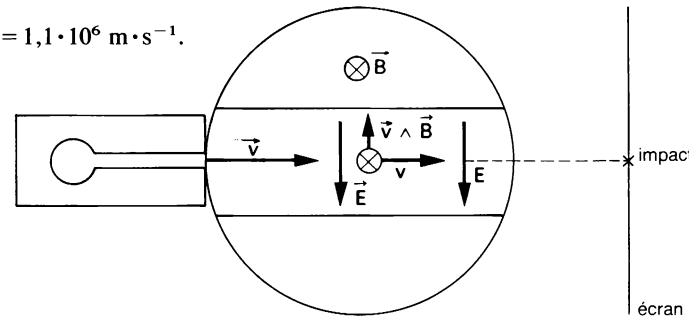


Fig. 7

Si les particules sont lancées dans le champ électrostatique seul, elles dévient de 2 cm après 10 cm de parcours donc : $\tan\theta = 2\dfrac{2}{10} = \dfrac{2}{5}$.

La particule est soumise à la force $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$.

Elle prend une accélération $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$.

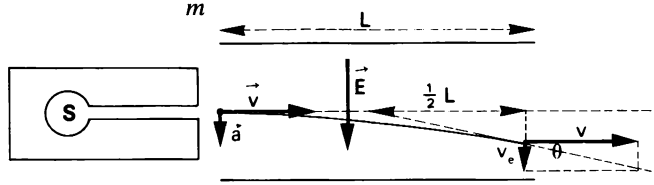


Fig. 8

La vitesse admet une composante pour les 10 cm de parcours :

$$V_E = a \cdot t = a \cdot \frac{L}{V} = \frac{q \cdot E}{m} \cdot \frac{L}{V}$$

la déviation peut s'écrire :

$$\tan\theta = \frac{V_E}{V} = \frac{2}{5}, \quad \frac{2}{5}V = \frac{q\cdot E}{m}\cdot\frac{L}{V},$$

soit $$\frac{q}{m} = \frac{2}{5}V^2\cdot\frac{1}{E\cdot L} \qquad \frac{q}{m} = 4{,}84\cdot 10^7\ \mathrm{C\cdot kg^{-1}}.$$

Dans le champ magnétique seul les particules ont une trajectoire circulaire de rayon R :

$$q\cdot V\cdot B = \frac{m\cdot V^2}{R}, \quad R = \frac{m\cdot V}{q\cdot B}, \quad R = 0{,}25\ \mathrm{m}.$$

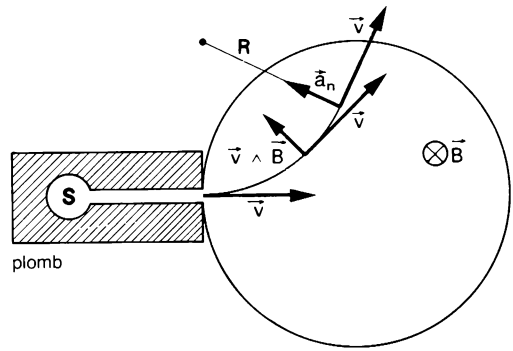


Fig. 9

Si $q = 3{,}2\cdot 10^{-19}$ C, la particule a pour masse : $m = 6{,}61\cdot 10^{-27}$ kg.
Soit, pour une mole de particules $M = \mathcal{N}\cdot m = 4\cdot 10^{-3}$ kg : c'est une particule α.

8. Les ions ont une charge positive, donc la force électrostatique $q\cdot\vec{E}$ a même sens et même direction que le champ $\vec{E}$. La force de Lorentz $\vec{F}' = q\vec{V}\wedge\vec{B}$ doit être opposée à la force $\vec{F} = q\cdot\vec{E}$.
Il faut donc que $\vec{V}\wedge\vec{B}$ soit opposé à $\vec{E}$: $\vec{V}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux entre eux et orthogonaux à $\vec{E}$. Les trois vecteurs forment un trièdre gauche.
La vitesse des ions qui ne sont pas déviés est :

$$V = \frac{E}{B} = 5\cdot 10^5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Dans le champ magnétique uniforme orthogonal à $\vec{V}$, les ions ont un mouvement circulaire uniforme. La force de Lorentz est la force qui, à chaque instant, courbe la trajectoire :

$$F' = \frac{m\cdot V^2}{R} \Rightarrow F' = q\cdot V\cdot B.$$

On a donc : $\dfrac{m\cdot V^2}{R} = q\cdot V\cdot B$, soit : $q\cdot B\cdot R = m\cdot V$.

La vitesse des ions est constante numériquement mais l'orientation du vecteur vitesse change à chaque instant.

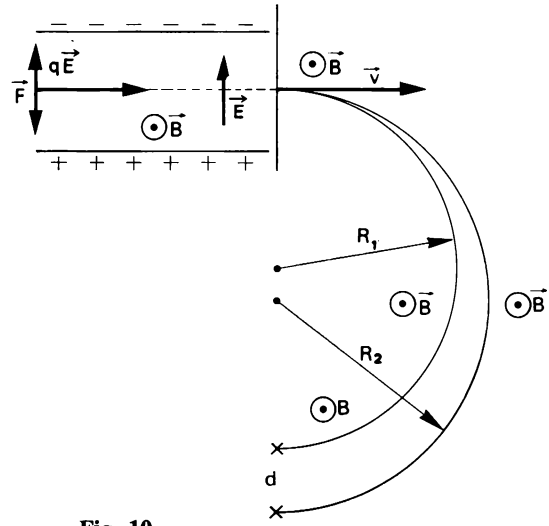


Fig. 10

Les ions Ne de masse 20 suivent une trajectoire de rayon $R_1 = \frac{V}{q \cdot B} \cdot m_1$: les ions Ne 22 de masse suivant une trajectoire de rayon $R_2 = \frac{V}{q \cdot B} \cdot m_2$; une mole d'ions Ne = 20, a pour masse 20 g soit, pour un ion, $\frac{0{,}02}{\mathcal{N}}$ kg; de même la masse d'un ion Ne = 22 est $\frac{0{,}22}{\mathcal{N}}$ kg. On a donc :

$$R_1 = \frac{V}{q \cdot B} m_1, \quad R_1 = 0{,}26 \text{ m};$$

de même : $$R_2 = \frac{V}{q \cdot B} m_2, \quad R_2 = 0{,}286 \text{ m}.$$

Les points d'impact sur la plaque photographique sont distants de $D_2 - D_1 = d$ où D_1 et D_2 sont les diamètres des trajectoires.
On a donc : $d = 2(R_2 - R_1) = 0{,}052$ m soit 5,2 cm.

9. Dans le champ magnétique $\vec{B}$, les particules de quantités de mouvement $\vec{p} = m \cdot \vec{V}$ décrivent une trajectoire circulaire de rayon r :

$$\frac{m \cdot V^2}{r} = q \cdot V \cdot B, \quad m \cdot V = q \cdot r \cdot B, \quad r = \frac{m \cdot V}{q \cdot B}.$$

Les particules décrivent un demi-cercle de rayon r donc parcourent une distance $d = \pi \cdot r$ à la vitesse V; or $V = \frac{q \cdot B \cdot r}{m}$, donc

$$T = \frac{\pi \cdot r}{\frac{q \cdot B \cdot r}{m}}, \quad T = \frac{\pi \cdot m}{q \cdot B}$$

qui ne dépend pas de V. Les électrons décrivent un demi-cercle en

$$T = \frac{\pi \cdot m}{q \cdot B} = 1{,}77 \cdot 10^{-11} \text{ s.}$$

La fréquence de la tension accélératrice doit être

$$N = \frac{1}{2T} = 2{,}82 \cdot 10^{10} \text{ Hz.}$$

De même pour des particules α

$$T = \frac{\pi \cdot m}{q \cdot B} = 6{,}52 \cdot 10^{-8} \text{ s} \quad \text{soit} \quad N = 7{,}67 \cdot 10^{6} \text{ Hz;}$$

(se méfier : la fréquence se calcule sur un tout; la période vaut donc ici $2T$).

L'électron devient relativiste dès que sa vitesse atteint $\frac{1}{3}c$. A chaque accélération son énergie augmentant de $e \cdot U$, au bout de n accélérations l'énergie est $n \cdot e \cdot U$, sous forme cinétique :

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2, \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{c}{3}\right)^2 = 4{,}5 \cdot 10^{-15} \text{ J.}$$

$n \cdot e \cdot U = 4{,}5 \cdot 10^{-15} \Rightarrow n = 281$, soit 140 tours environ (une accélération tous les demi-tours).

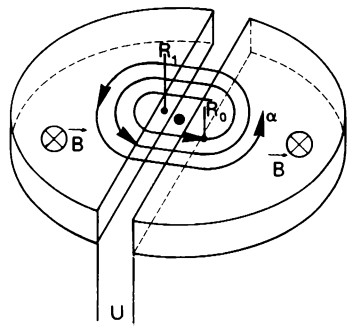


Fig. 11

Le rayon de leur trajectoire est alors $5{,}6 \cdot 10^{-4}$ m.
Pour une particule α, quand la trajectoire a pour rayon 0,5 m, la vitesse est :

$$V = \frac{q \cdot B \cdot r}{m}, \quad V = 2{,}4 \cdot 10^{7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

L'énergie cinétique est alors : $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2$, $E_c = 1{,}9 \cdot 10^{-12}$ J. L'énergie de masse des particules α est $m \cdot c^2$, soit $E = 6 \cdot 10^{-10}$ J.
E_c est inférieur à 1 % de l'énergie de masse : les particules ne sont pas relativistes.

LES COURANTS, SOURCES DE CHAMP MAGNÉTIQUE

11

L'étude des spectres magnétiques montre que leur topographie est indépendante de l'intensité du courant qui crée le champ : par contre, l'intensité du champ en un point est une fonction linéaire de l'intensité du courant I si le milieu ne contient pas de matériaux ferromagnétiques (dans ce cas particulier, il se superpose au champ créé par le courant un champ produit par l'aimantation du milieu).

Le sens du vecteur B est lié au sens du courant : un tire-bouchon qui avance dans le sens de I tourne dans le sens de B.
Dans le cas d'une bobine le tire-bouchon qui tourne dans le sens de I avance dans le sens de B.

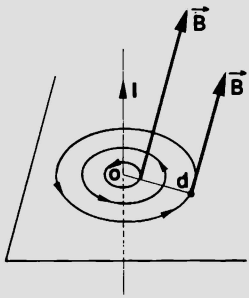


Fig. 1

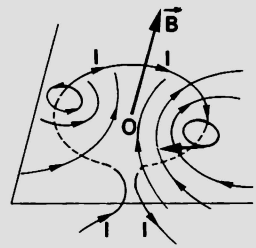


Fig. 2

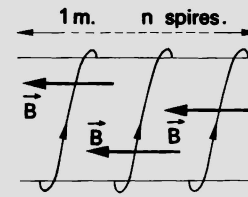


Fig. 3

Champ produit par un courant rectiligne infini : $B = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot d}$ **(fig. 1) :**

champ au centre d'une bobine plate : $\dfrac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2 \cdot R}$ **(fig. 2) :** N, nombre total de spires;

champ uniforme dans un solénoïde comportant n spires par mètre : $B = \mu_0 \cdot n \cdot I$ **(fig. 3).**

Le coefficient μ_0 est une conséquence du choix des unités : B est exprimé en Tesla (T), l'intensité en ampère (A), les distances sont en mètres (m).

Remarque : $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c^2 = 1$; $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9}$, permittivité électrique.
$c = 3 \cdot 10^8$ m $\times$ s^{-1}; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, perméabilité magnétique.

1. Un solénoïde est parcouru par un courant d'intensité $I = 2$ A : sa longueur est $L = 20$ cm, son rayon $r = 4$ cm. Il est formé de 800 spires de fil de cuivre isolé, la résistance de l'ensemble est 4 ohms. Quelle est la valeur du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde? Quelle est la force électromotrice du générateur de résistance 1 ohm aux bornes duquel il est branché?

   Réponses : $B = \mu_0 \cdot n \cdot I \Rightarrow B = 10$ mT, $n = 4\,000$ spires par mètre. $E = 10$ V.

2. Un fil rectiligne vertical très long est parcouru par un courant ascendant d'intensité $I = 10$ A. Dans quel sens tournent les lignes de champ magnétique? Quelle est l'intensité du champ en C situé à 20 cm du fil?
   A quelle distance du fil le champ magnétique produit par I est-il égal à B_h, intensité de la composante horizontale du champ magnétique terrestre? $B_h = 20$ μT.

   Réponse : les lignes de champ tournent vers la gauche de l'observateur d'ampère. En C, $B = \dfrac{\mu_0 \cdot i}{2 \cdot \pi \cdot d} = 10$ μT. B est inversement proportionnel à d donc il faut $d = 40$ cm pour observer $B = 20$ μT.

3. Un fil rectiligne vertical est parcouru par un courant I ascendant, une boussole orientée selon la composante horizontale du champ magnétique terrestre B_h d'intensité $B_h = 20$ μT a sa direction (s, n) passant par le fil quand $I = 0$. Elle dévie de 60° quand le fil est parcouru par le courant d'intensité I. Calculer I si le pivot de la boussole de petite dimension est à 5 cm du fil.

   Réponse : $B = B_h \cdot \tan 60°$; $B = 34{,}6$ μT; $B = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot d}$;

   $$I = \frac{2 \cdot \pi \cdot d \cdot B}{\mu_0} \Rightarrow I = 8{,}65 \text{ A}.$$

4. Une bobine plate a pour rayon 8 cm. Elle est formée de 100 spires parcourues par un courant d'intensité $I = 5$ A. Au centre de la bobine on a disposé une boussole qui, en l'absence de courant, est contenue dans le plan de la bobine. De quel angle tourne-t-elle quand la bobine est parcourue par le courant I? Composante horizontale du champ magnétique terrestre $B_h = 20$ μT.

   Réponse : $B = \dfrac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R} = 3{,}92$ mT; $\tan \theta = \dfrac{B}{B_h} = 196{,}5$, $\theta \approx 90°$. La boussole se dispose perpendiculairement au plan des spires.

5. Un aimant droit monté sur un pivot est orienté à l'intérieur et selon l'axe d'un solénoïde long. On dispose une bobine plate de telle sorte que l'aimant soit dans le plan de la bobine et en son centre.
   Les deux bobines étant parcourues par le même courant I, montrer que la déviation de l'aimant est indépendante de I.

   Réponses : dans le solénoïde, $B = \mu_0 \cdot n \cdot I$, au centre de la bobine plate : $B' = \dfrac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2 \cdot R}$; $\tan \theta = \dfrac{B'}{B} = \dfrac{N}{2 \cdot R \cdot n}$ indépendant de I.

Certains problèmes doivent être faits après avoir pris connaissance du chapitre suivant.

1. Trois fils rectilignes parallèles sont situés dans un même plan vertical. Les fils X'X et Z'Z sont fixes et distants de $2a$. Le fil Y'Y est suspendu et peut se déplacer librement autour du point de suspension situé à égale distance des fils X'X et Z'Z.

1° Les trois courants I_X, I_Z et I_Y étant de même sens et égaux : de quelle façon se déplace le fil Y'Y?

2° Les trois courants étant de même sens $I_X = 2 \cdot I_Z$, comment se déplace Y'Y?

3° I_X et I_Z étant égaux et de sens contraire, comment se déplace Y'Y si $I_Y = I_X$?

4° I_X et I_Z étant de sens contraire $I_X = 2 \cdot I_Z$, comment se déplace Y'Y si $I_Y = I_Z$?

2. Dans un circuit un rhéostat permet de faire varier l'intensité du courant dans un conducteur rectiligne vertical. Une boussole est placée au voisinage de ce conducteur loin de ses extrémités. Quand le courant est nul la direction *sn* indiquée par la boussole passe par le fil. L'intensité de la composante horizontale du champ magnétique terrestre est $B_h = 20\ \mu T$.

1° La boussole ayant son centre à 4 cm du fil, de quel angle dévie-t-elle si l'intensité du courant dans le fil est $i = 4$ A?

2° Quelle est la déviation si l'expérience est reprise à 8 cm du fil?

3° Quelle doit être l'intensité du courant pour que l'on retrouve la déviation de la première expérience?

3. Deux conducteurs rectilignes très longs parallèles sont distants de $a = 10$ cm. dans une première expérience, ils sont parcourus par des courants $I_1 = I_2 = 10$ A de même sens.

Soit deux portions de chacun des conducteurs précédents A_1B_1 de milieu O_1 parcouru par le courant I_1 de A_1 vers B_1, et A_2B_2 de milieu O_2 parcouru par le courant I_2 de A_2 vers B_2 tels que $A_1B_1B_2A_2$ forme un rectangle de côtés $B_2B_1 = a$, $A_1B_1 = 1$ m.

1° Déterminer le champ magnétique créé par le courant I_1 en tout point de A_2B_2 (direction sens et module).

2° Déterminer le champ magnétique créé par le courant I_2 en tout point de A_1B_1. Quelle est la force qui s'exerce sur la portion de conducteur A_2B_2 et sur la portion de conducteur A_1B_1?

Reprendre les mêmes questions le courant I_2 étant de sens contraire au courant I_1, toutes les autres données étant inchangées.

4. On a disposé sur un cadre de bois évidé en son centre, pour permettre l'installation d'une boussole, des bobines plates coplanaires et concentriques de rayons $R_1 = 5$ cm; $R_2 = 10$ cm; $R_3 = 15$ cm et $R_4 = 20$ cm formées respectivement de $n_1 = 10$ spires; n_2; n_3; n_4 spires.

En l'absence de courant, la boussole placée au centre des bobines est dans le plan des spires. Quand on fait passer un courant d'intensité $i = 0{,}1$ A dans la bobine (R_1, n_1), de combien tourne la boussole? La composante horizontale du champ magnétique terrestre $\vec{B}_h$ a pour intensité $B_h = 20\ \mu T$.

1° Combien de spires doit comporter la bobine (R_2, n_2) pour que l'on observe la même rotation de la boussole si un courant de même intensité $i = 0{,}1$ A parcourt ses spires dans le même sens?
La bobine (R_3, n_3) a le même nombre de spires que la bobine (R_2, n_2) quelle doit être l'intensité du courant pour que l'on observe la même rotation de la boussole que dans les expériences précédentes?
Quel est le nombre de spires de la bobine (R_4, n_4) si un courant d'intensité $i = 0{,}1$ A produit la même rotation de la boussole que le courant de 0,1 A circulant dans la bobine (R_1, n_1)?

2° Les quatre bobines sont parcourues par les courants précédents simultanément, quelle déviation de la boussole observe-t-on, les champs magnétiques produits étant tous de même sens?

3° Que se passe-t-il si deux bobines (R_1, n_1) et (R_3, n_3) sont parcourues par les courants précédents tournant dans le sens des aiguilles d'une montre et les deux autres par les courants précédents tournant dans le sens trigonométrique?

5. Un circuit est composé d'un accumulateur de force électromotrice $E = 10$ V de résistance négligeable, d'un rhéostat de résistance $0 \leqslant R_h \leqslant 27\ \Omega$, d'un ampèremètre utilisé sur le calibre 10 A et d'un conducteur de cuivre vertical qui coupe en O un plan horizontal sur lequel on déplace une boussole. On appelle d la distance du milieu de la boussole au centre du fil vertical O. Tous ces éléments sont associés en série les fils de branchement sont suffisamment éloignés de la boussole pour que leur influence puisse être négligée.

1° Montrer qu'il existe deux positions de la boussole dans ce plan telles que la direction s − n indiquée par la boussole passe par O quand le courant dans le fil est nul. La direction s − n de la boussole peut-elle passer par O quand un courant i passe dans le fil?

2° La boussole étant placée à $d = 5$ cm du fil, on fait passer un courant d'intensité $i = 5$ A, de quel angle tourne-t-elle si quand $i = 0$ la direction s − n passe par O. En maintenant le courant constant dans le fil, on éloigne la boussole en laissant son pivot dans le plan du méridien magnétique passant par le fil vertical. Quelles sont les déviations de la boussole quand $d = 2$ cm : puis $d = 10$ cm. La boussole étant à 5 cm du conducteur dans le plan du méridien magnétique passant par O quand i est nul, montrer que le cercle divisé qui sert de repère pour les rotations de la boussole peut être gradué en intensité. La graduation est-elle régulière?
Quels sont les angles de déviation correspondants à $R_h = 1\ \Omega$; $5\ \Omega$; $10\ \Omega$.

3° La boussole est placée à 5 cm du conducteur dans les mêmes conditions que précédemment, on relève les indications suivantes en fonction de l'intensité :

i	1 A	2 A	5 A	6 A	10 A
déviation	11°	22°	45°	50°	63,30°

Que pouvez-vous déduire de ces mesures quant à la fonction $B_i = f(i)$?
Montrer que $\dfrac{2 \cdot \pi d \cdot B_i}{i}$ est une constante, la calculer.

1. 1° En tout point du fil Y'Y le champ magnétique est nul, les champs créés par les courants I_X et I_Z sont opposés. Le fil n'est soumis à aucune action mécanique résultant d'une interaction de I_Y avec un champ magnétique.

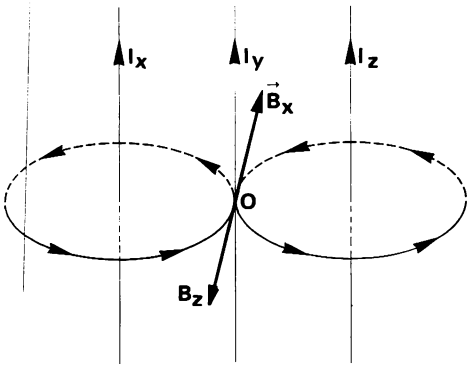


Fig. 4 *a*

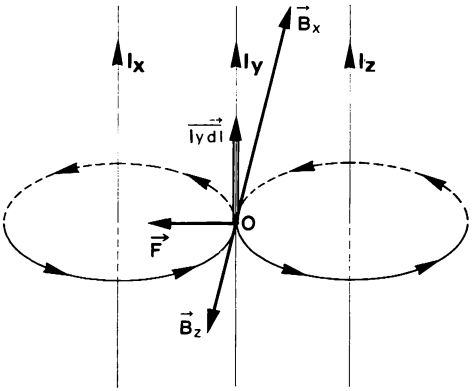


Fig. 4 *b*

2° $I_X = 2 \cdot I_Z$. Soit B_Z le champ magnétique en O dû à I_Z et B_X, le champ magnétique dû à $I_X B_X$ est deux fois plus intense que B_Z. Les deux vecteurs sont de sens contraire. La somme n'est pas nulle mais égale à $-B_Z$, perpendiculaire au fil Y'Y en tout point. Celui-ci est donc soumis à une force de Laplace $\vec{F} = \Sigma i \cdot \vec{dL} \wedge \vec{B}$ $\vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{B}_X$ et à $I_Y \cdot \vec{dL}$. Le conducteur Y'Y est attiré par X'X.

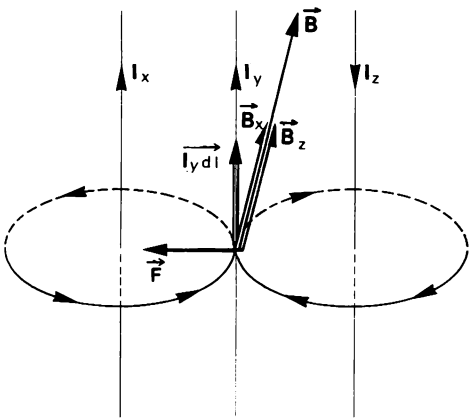


Fig. 4 *c*

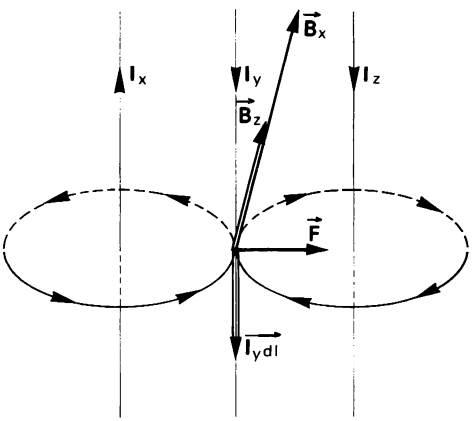


Fig. 4 *d*

3° I_X et I_Z sont égaux et de sens contraire donc les champs magnétiques B_X et B_Z en O sont de même sens et s'additionnent le champ résultant est $2 \cdot B_X$. Le conducteur Y'Y est donc attiré par le conducteur X'X. La force en action est deux fois plus intense que dans (*b*).

4° En O B_X et B_Z ont même sens. Le champ résultant est $3 \cdot B_Z$; le courant I_Y a pour sens I_Z. Le conducteur Y'Y est donc repoussé par le conducteur X'X et attiré par le conducteur Z'Z. La force est trois fois plus intense que dans (*b*).

2. 1° Le champ magnétique produit par le courant i est horizontal et perpendiculaire à la composante horizontale du champ magnétique terrestre.

Son intensité est $B = \dfrac{\mu_0 \cdot i}{2 \cdot \pi \cdot d}$, soit, à 4 cm du fil parcouru par $i = 4$ A, $B = 20$ μT.

La boussole tourne d'un angle θ tel que $\tan \theta = \dfrac{B}{B_h} = 1$, soit $\theta = 45°$.

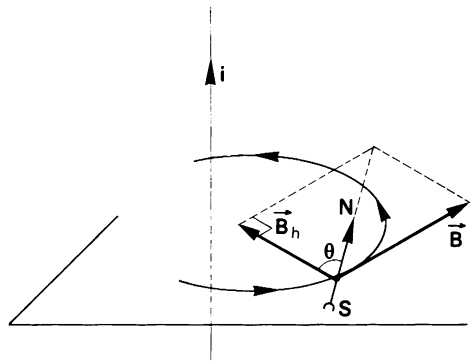


Fig. 5

2° Si l'expérience est reprise à 8 cm du fil, le champ dû au courant est deux fois moins intense $B = 10$ μT, $\tan \theta = 0{,}5$, $\theta = 26°30$.

3° Pour retrouver la déviation précédente, il faut que le rapport $\dfrac{i}{d}$ soit le même que dans la première expérience, donc que

$$i = 8 \text{ A } \frac{i}{d} = 1.$$

3. 1° Les lignes de champs entourant le conducteur A_1B_1 forment un tube de champ. Elles sont en O_2 perpendiculaires au conducteur A_2B_2; en O_2 le champ magnétique $\vec{B}_{O_2}$ est perpendiculaire à la figure et dirigé vers l'arrière **(fig. 6 *a*)**.

$\vec{B}_{O_2}$ en O_2 a pour intensité $\dfrac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot d \cdot \pi}$ $B_{O_2} = 2 \cdot 10^{-5}$ T.

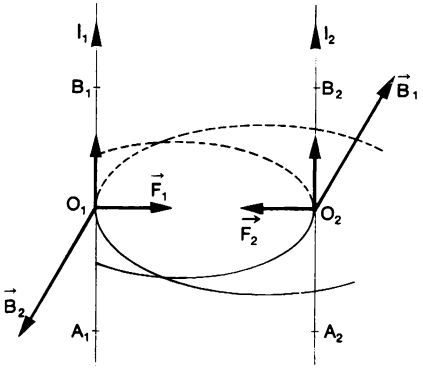


Fig. 6 *a*

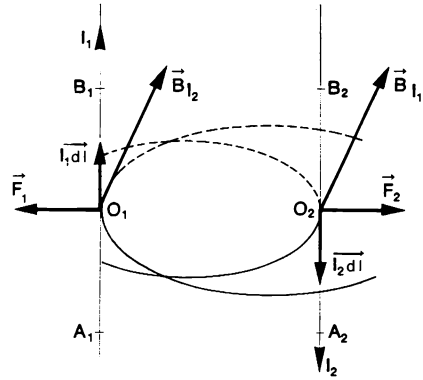


Fig. 6 *b*

2° De même, le champ magnétique produit par le courant I_2 est, en O_1, perpendiculaire au conducteur A_1B_1 et dirigé vers l'avant. Son intensité est : $B_{O_1} = 2 \cdot 10^{-5}$ T.
Les deux conducteurs s'attirent : l'intensité de la force d'attraction est :

$$\vec{F}_1 = I_1 \ \overrightarrow{A_1B_1} \wedge \vec{B}_{O_1}.$$

d'après le principe de l'action et de la réaction $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$

$$F_1 = F_2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ N}.$$

3° Si les courants sont de sens contraire, changeons par exemple le sens de I_2 **(fig. 6 *b*).**
Rien n'est changé en ce qui concerne le champ magnétique produit par I_1 en O_2. $B_{O_2} = 2 \cdot 10^{-5}$ T dirigé vers l'arrière perpendiculairement au plan $A_1B_1B_2A_2$. Le champ magnétique produit en O_1 par le courant I_2, change de sens. Il est, lui aussi, dirigé vers l'arrière de même module que $\vec{B}_{O_1}$: $\vec{B}_{O_1} = \vec{B}_{O_2}$.
L'élément de courant $I_2\overrightarrow{dL}$ ayant changé de sens, la force $\vec{F}_2$ est une force de répulsion, les deux fils ont tendance à s'écarter l'un de l'autre. Elle a même intensité que dans le cas précédent.
Le champ magnétique $\vec{B}_{O_1}$ ayant changé de sens la force $\vec{F}_1$ est aussi répulsive :

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow \|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\| = 2 \cdot 10^{-4} \text{ N}.$$

4. 1° Le champ magnétique au centre d'une bobine plate est donné par la relation : $B_0 = \dfrac{\mu_0 \cdot I \cdot n}{2 \cdot R}$. Pour la bobine (1) on a : $n_1 = 10$ spires, $R_1 = 0{,}05$ m.

$$B_0 = 12{,}6 \ \mu\text{T}, \quad \tan\theta = \frac{B_i}{B_h}, \quad \tan\theta = 0{,}63, \quad \theta = 32°.$$

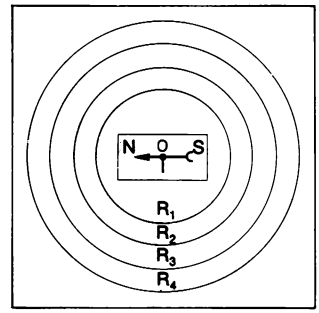
Pour que le champ magnétique au centre de la bobine (2) ait la même valeur il faut que le rapport $\dfrac{n \cdot I}{R}$ soit le même.
Si $R_2 = 2 \cdot R_1$, il faut $n_2 = 2 \cdot n_1$, soit $n_2 = 20$ spires.
La bobine (3) est elle aussi formée de 20 spires son rayon est 15 cm pour avoir en son centre le même champ magnétique il faut :

$$\frac{n_1 \cdot I_1}{R_1} = \frac{20 \cdot I_3}{R_3}, \quad I_3 = 0{,}15 \text{ A}.$$

La bobine (4) doit de même avoir n_4 spires :

$$\frac{n_1 \cdot I_1}{R_1} = \frac{n_4 \cdot 0{,}1}{0{,}2},$$

$$n_4 = 40 \text{ spires}.$$



2° Les quatre champs magnétiques sont égaux, le champ résultant au centre est donc $B = 4$. B_0 soit $B = 50{,}4$ μT, perpendiculaire à la composante horizontale du champ magnétique terrestre $B_h = 20$ μT **(fig. 11)** :

$$\tan \theta = \frac{B}{B_h}; \quad \tan \theta = 2{,}52; \quad \theta = 68°30'.$$

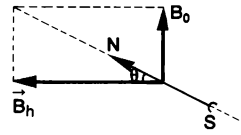


Fig. 7

3° Dans cette disposition, deux champs sont opposés aux deux autres. Donc, comme ils ont tous même module, la somme est nulle. Le champ au centre des spires se réduit au champ magnétique terrestre, en particulier :

$$B_h = 20 \text{ μT}.$$

5. 1° La boussole s'oriente selon la composante horizontale du champ magnétique terrestre. En l'absence de courant dans le fil, il existe donc, dans le plan horizontal, une ligne de champ passant par O. La boussole s'oriente sur cette ligne de champ dans le sens s-n correspondant au sens du champ magnétique. Il existe donc deux positions de la boussole : dans un cas le pôle nord est du côté de O, dans l'autre c'est le pôle sud **(fig. 12)**. Le courant i passant dans le fil produit un champ magnétique, les lignes du champ produit par i sont des cercles centrés en O. Le vecteur $\vec{B}_i$ est donc dans les positions précédemment déterminées perpendiculaire au champ magnétique terrestre $\vec{B}_h$.
La boussole s'oriente selon $\vec{B}_i + \vec{B}_h$; elle définit une nouvelle direction qui ne peut passer par O. La déviation de la boussole par rapport à la position précédente est θ tel que : $\tan \theta = \frac{B_i}{B_h}$ **(fig. 13)**.

Fig. 8

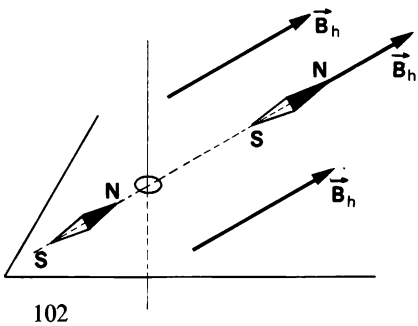
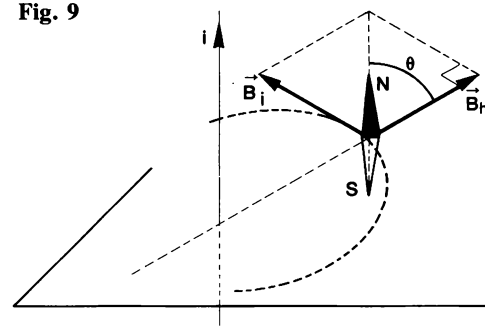


Fig. 9



2° La boussole est à 5 cm du fil; l'intensité du courant est $i = 5$ A. On a :

$$B_i = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot d}, \quad B_i = 20\ \mu\text{T}, \quad B_h = 20\ \mu\text{T}, \quad \text{donc} \quad \tan\theta = 1, \quad \theta = 45°.$$

Si on déplace la boussole en laissant son pivot dans le plan du méridien magnétique, les champs $\vec{B}_i$ et $\vec{B}_n$ restent orthogonaux. On a donc, puisque B_i est inversement proportionnel à d,

pour $d = 2$ cm, $B_i = \frac{5}{2} \cdot 20\ \mu\text{T}$, $B_i = 50\ \mu\text{T}$, $\tan\theta = 2{,}5$, $\theta = 68°$;

pour $d = 10$ cm, $B_i = \frac{5}{10} \cdot 20\ \mu\text{T}$, $B_i = 10\ \mu\text{T}$, $\tan\theta = 0{,}5$, $\theta = 26°30$.

3° La boussole est replacée à 5 cm du fil conducteur. Quand $i = 0$, sa direction s-n passe par O.

Si i varie, B_i varie proportionnellement à i; $\tan\theta = \frac{B_i}{B_h}$, $\tan\theta = \lambda \cdot i$. tan n'est pas une fonction linéaire donc $s\theta$ n'est pas proportionnel à i : les graduations ne sont pas régulières; elles sont d'autant plus resserrées que i est grand.

Si $R_h = 1\ \Omega$, $i = 10$ A, $B_i = 40\ \mu$T, $\theta = 63°30$.
Si $R_h = 5\ \Omega$, $i = 2$ A, $B_i = 8{,}1\ \mu$T, $\theta = 22°$.
Si $R_h = 10\ \Omega$, $i = 1$ A, $B_i = 4\ \mu$T, $\theta = 11°$.

On peut déduire du tableau de mesure la proportionnalité de B_i et i :

$$B_i = B_h \cdot \tan\theta.$$

i	1 A	2 A	5 A	6 A	10 A
B_i	3,9 μT	8,1 μT	20 μT	24 μT	40 μT
$\frac{2 \cdot \pi \cdot d \cdot B_i}{i}$	$1{,}26 \cdot 10^{-6}$	$1{,}27 \cdot 10^{-6}$	$1{,}26 \cdot 10^{-6}$	$1{,}26 \cdot 10^{-6}$	$1{,}26 \cdot 10^{-6}$

Cette constante est la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ USI, μ_0 en $\text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$.

12 ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UN COURANT LOI DE LAPLACE. TORSION D'UN CADRE

1. Loi de Laplace

Expérimentalement, un conducteur traversé par un courant et placé dans un champ magnétique est soumis à une force appelée force de Laplace. Cette force est justifiée par le fait que le courant est dû à un mouvement d'ensemble *ordonné* des porteurs de charges qui se superpose au mouvement *désordonné* d'agitation thermique. Chaque porteur de charge est donc soumis à la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Macroscopiquement, tout se passe comme si ces forces étaient transférées au conducteur lui-même(*). Un élément $d\vec{L}$ du conducteur parcouru par le courant I est alors soumis à la force élémentaire **(fig. 1)**

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{L} \wedge \vec{B}.$$

Le sens de la force de Laplace est donné par les règles du produit vectoriel : règle du tire-bouchon ou règle des trois doigts de la main droite **(fig. 2).**

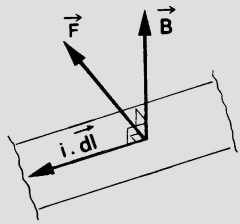


Fig. 1

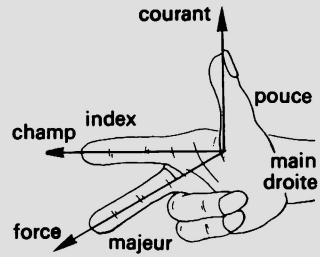


Fig. 2

(*) Ce phénomène de « transfert » ne peut se comprendre qu'à l'échelle microscopique. Le passage du courant électrique dans un conducteur correspond à un déplacement de charges électriques. Ces charges, qui ont un mouvement d'ensemble dans le conducteur se superposant à l'agitation thermique, sont soumises à la force de Lorentz $\vec{f} = q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$ **(fig. 3).** Dans les métaux les charges mobiles sont des électrons. Les atomes du métal ayant perdu des électrons qui participent à la conduction électrique ont une charge positive : ce sont des ions positifs qui sont fixes dans le conducteur et qui en déterminent la géométrie ainsi que celles des lignes de courant.

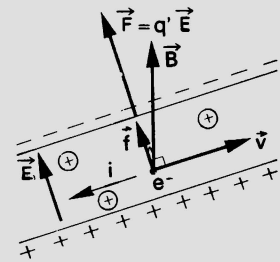


Fig. 3

La loi de Laplace reste vraie même quand les charges mobiles assurant le courant ne sont pas des électrons.

• *Cas d'un champ uniforme.* L'ensemble des forces électromagnétiques agissant sur un conducteur $\overset{\frown}{AB}$ équivaut alors à une force unique $\vec{F}$ obtenue en sommant les forces élémentaires $\mathrm{d}\vec{F}$: $\vec{F} = \left(\int_{\overset{\frown}{AB}} I \cdot \mathrm{d}\vec{L}\right) \wedge \vec{B}$.

• *Si le conducteur* $\overrightarrow{AB} = \vec{L}$ *est rectiligne,* on obtient alors la force de Laplace dans un champ uniforme par l'expression :

$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \wedge \vec{B}$ I : intensité, en ampère,
L : longueur du conducteur, en mètre,
B : intensité du champ magnétique, en tesla,
F : force de Laplace, en newton.

Par raison de symétrie, cette force est appliquée au milieu du conducteur rectiligne.

2. Application : torsion d'un cadre

Champ uniforme (fig. 4). Un cadre rectangulaire susceptible de tourner autour d'un axe (Δ) orthogonal à un champ uniforme $\vec{B}$ est soumis à une torsion dont le couple est donné par :

$$\mathcal{M}_\Delta = N \cdot S \cdot I \cdot B \cdot \sin\,\theta$$

de la forme $\mathcal{M}_\Delta = K \cdot I \cdot \sin\,\theta$.
N : nombre de spires.
S : surface du cadre.
I : intensité passant dans chaque spire.
B : champ (d'induction) magnétique.
θ : angle $(\vec{B}, \vec{n})$, $\vec{n}$ étant le vecteur unitaire de l'axe, normal à la surface du cadre et orienté suivant la règle du tire-bouchon.

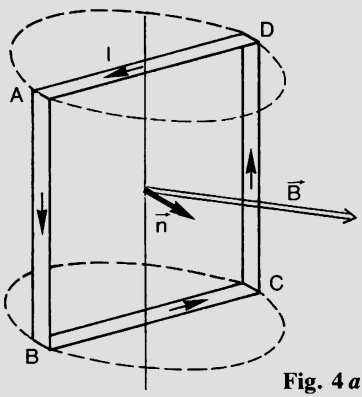


Fig. 4 *a*

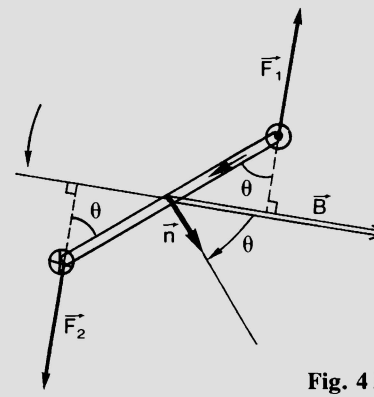


Fig. 4 *b*

Champ de Hall : si les électrons mobiles n'étaient soumis qu'à la force de Lorentz : $q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$ il y aurait déflection du courant d'électrons ce qui est interdit par la géométrie du conducteur. Dans un régime transitoire il y a bien déflection de certains électrons, ce qui a pour effet de créer un champ électrique appelé *champ de Hall* $\vec{E}_H$ qui s'oppose au champ $\vec{v} \wedge \vec{B}$, de façon à maintenir la géométrie des lignes de courant permanent **(fig. 1).**

Loi de Laplace : les ions positifs sont alors soumis à la seule force $\vec{f} = q' \cdot \vec{E}_H$ car ils sont fixes; il en résulte un déplacement du conducteur dans le sens de $\vec{E}_H$, puisque $q' > 0$. Au niveau macroscopique un élément de courant $I \cdot \mathrm{d}\vec{l}$, orienté dans le sens du courant, est alors soumis à la force élémentaire : $\mathrm{d}\vec{F} = I \cdot \mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B}$ **(fig 1).**

Champ radial (fig. 5)

Alors $\theta = (\vec{B}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2}$, quelle que soit la position du cadre; le moment du couple de torsion vaut :

$\mathcal{M}_\Delta = N \cdot S \cdot I \cdot B = K \cdot I.$

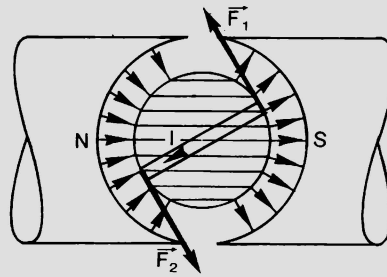


Fig. 5

Équilibre du cadre

— si *le champ est uniforme,* le cadre va prendre une position d'équilibre $\theta = 0$; cependant s'il est également soumis à un autre couple (torsion d'un fil, d'un ressort) la position d'équilibre correspondra à l'égalité numérique des deux couples.

— si *le champ est radial,* il faut nécessairement un autre couple pour l'équilibrer.

EXERCICES

1. Dans quels cas la force de Laplace est-elle nulle?

   Réponse : La force de Laplace est nulle si le courant est nul, si le champ magnétique est nul, si le vecteur élément de courant est parallèle au vecteur champ magnétique qu'ils soient de même sens ou de sens contraire.

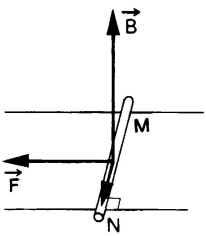
2. Un fil parcouru par un courant est-il soumis à une action mécanique entre les armatures d'un condensateur chargé?

   Réponse : Non, la charge du conducteur est nulle : il contient un nombre de charges positives fixes égal au nombre d'électrons libres participant à la conduction électrique.

3. Une résistance non inductive est constituée d'un fil souple replié sur lui-même de telle sorte qu'il soit assimilable à deux éléments de courant opposés quand la résistance est parcourue par un courant. Une telle résistance est-elle soumise à un effet mécanique quand on la place dans le champ uniforme produit par un aimant en U?

   Réponse : Il existe toujours par construction de la résistance deux éléments de courant opposés, chacun d'eux est soumis à la force de Laplace, les deux forces sont opposées globalement. L'effet mécanique est nul puisque la somme des forces est nulle.

4. Deux rails conducteurs sont disposés horizontalement à 5 cm l'un de l'autre. Un conducteur mobile peut rouler sur ces deux rails. Soit M et N les points



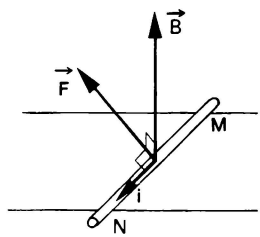


Fig. 6

il y aura rupture du contact en N

de contact entre les rails et le conducteur mobile. L'ensemble se trouve dans un champ magnétique uniforme $B = 0{,}05$ T perpendiculaire au plan des rails. L'intensité du courant dans cette portion du circuit est $i = 10$ A.
Quelle est l'intensité de la force de Laplace agissant sur MN quand le conducteur mobile est perpendiculaire aux rails?
Que se passe-t-il si le conducteur MN occupe, sur le rail, une position quelconque, le contact électrique restant établi entre les rails et le conducteur mobile?

Réponse : $\vec{F} = i \cdot \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}$, $F = 0{,}025$ N. La force de Laplace reste perpendiculaire à l'élément de courant $i \cdot \overrightarrow{MN}$, celui-ci se met en mouvement dans la direction de la force. La longueur de l'élément de courant augmente donc aussi la force jusqu'au moment où le contact électrique sera rompu entre les rails et le conducteur mobile.

5. Un conducteur rectiligne rigide est suspendu par l'une de ses extrémités à une potence tandis que l'autre extrémité plonge dans une cuvette contenant du mercure. Un aimant en U produisant entre ses pôles un champ magnétique uniforme $B = 0{,}05$ T peut agir sur une portion $CD = 5$ cm du conducteur parcouru par un courant $i = 10$ A ascendant. L'aimant est déplacé le long du conducteur, son champ magnétique restant horizontal et dirigé vers l'observateur et le conducteur restant entre les pôles.
Comment varie l'inclinaison de ce conducteur par rapport à la verticale? On se bornera à faire une étude qualitative. Calculer l'intensité de la force de Laplace.

Réponse : la force de Laplace reste perpendiculaire à l'élément de courant, son intensité reste constante. Le poids du conducteur est vertical et appliqué au milieu du conducteur rectiligne. Quand l'aimant s'éloigne du point d'attache du conducteur l'inclinaison du fil augmente. Elle est maximale quand l'aimant est au voisinage de la cuve à mercure.
$\vec{F} = i \cdot \overrightarrow{CD} \wedge \vec{B}$: $F = 0{,}025$ N.

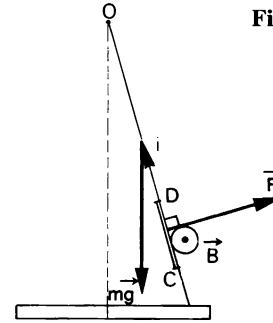


Fig. 7

6. Un conducteur très souple est disposé de façon à former une spire circulaire de rayon $R = 5$ cm. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme intense $B = 0{,}1$ T perpendiculaire à son plan. Quels sont les sens respectifs du champ magnétique et du courant dans le fil pour que la spire ait tendance à être contractée par les forces électromagnétiques? Quelle est l'intensité de la force de Laplace agissant sur un élément de courant $dL = 1$ mm si l'intensité du courant est $i = 100$ A?

Réponses : voir le schéma, les forces agissant sur des éléments de courant opposés sont de sens contraires, il faut choisir le sens de B, perpendiculaire au plan de la spire pour que les forces soient dirigées vers le centre. $F = 0{,}01$ N.

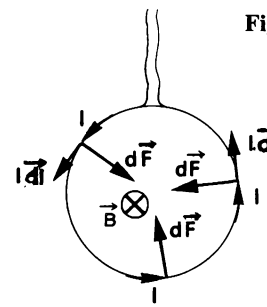


Fig. 8

7. Une spire a la forme d'un carré de côté $a = 4$ cm. Elle est placée entre les pôles d'un aimant en U produisant un champ B dont les lignes de champ sont parallèles au plan de la spire et aux côtés AE et DC du cadre. $B = 1$ mT. Quelles sont les forces agissant sur les quatre côtés du cadre si un courant $i = 5$ A tourne dans la spire dans le sens A → E → C → D → A?

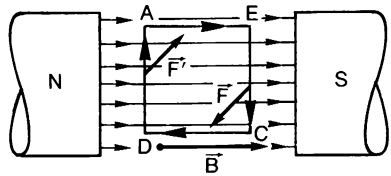


Fig. 9

Réponses : sur AE l'élément de courant $i \cdot \overrightarrow{AE}$ est parallèle à $\vec{B}$ donc la force de Laplace $\vec{F} = i \cdot \overrightarrow{AE} \wedge \vec{B} = \vec{0}$;
Sur EC l'élément de courant $i \cdot \overrightarrow{EC}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, $\vec{F} = i \cdot \overrightarrow{EC} \wedge \vec{B}$;
$F = 2 \cdot 10^{-4}$ N;
sur CD l'élément de courant $i \cdot \overrightarrow{CD}$ est parallèle à $\vec{B}$ donc $F = 0$;
sur DA l'élément de courant $i \cdot \overrightarrow{DA}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, la force agissant sur cet élément est opposée à la force agissant sur l'élément $i \cdot \overrightarrow{EC}$
$\vec{F} = i \cdot \overrightarrow{DA} \wedge \vec{B} \cdot F' = 2 \cdot 10^{-4}$ N.

8. Le cadre mobile d'un ampèremètre comporte $N = 100$ spires rectangulaires de côtés $L = 3$ cm, $l = 2$ cm. Ce cadre est suspendu par un ruban dont la constante de torsion vaut $C = 10^{-7}$ m·N·rad^{-1}. Ce cadre est mobile dans un champ magnétique radial $B = 0{,}2$ T qui agit sur les côtés L du cadre.
Traversé par un courant d'intensité i, le cadre tourne d'un angle θ. Calculez le rapport $\dfrac{\theta}{I}$ qui caractérise la sensibilité du galvanomètre.
Quelle est l'intensité du courant qui fait tourner le cadre de $\theta = 30°$?

Réponses : à l'équilibre il y a égalité des deux moments de couples : $C \cdot \theta = K \cdot i$ avec $K = N \cdot S \cdot B$.
La sensibilité vaut : $s = \dfrac{\theta}{I} = \dfrac{K}{C} = \dfrac{100 \times 0{,}03 \times 0{,}02 \times 0{,}2}{10^{-7}} = 1{,}2 \cdot 10^5 \cdot \text{rad} \cdot \text{A}^{-1}$.
Pour en angle de $30° = \dfrac{\pi}{6}$ rad, on aura $i = \dfrac{\theta}{s} \simeq 4{,}4\ 10^{-6}$ A.

9. On réalise une bobine plate formée de N spires rectangulaires de surface $S = 25$ cm^2. Cette bobine peut tourner autour d'un axe D situé dans son plan et passant par son centre. $N = 100$ spires.
Elle est placée dans un champ magnétique uniforme $B = 0{,}01$ T perpendiculaire à D et faisant un angle θ avec le plan de la bobine.
Quel est le couple de torsion auquel est soumise cette bobine quand l'intensité qui la traverse est $i = 2$A· et $\theta = 60°$? Quelles position va-t-elle prendre si on la libère?

Réponses : $\mathcal{M}_\Delta = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ m·N.
Si on libère la bobine, elle va prendre une position qui annule le couple : $\theta = 0$.

1. Un fil rigide OA de longeur $L = 20$ cm de masse $m = 20$ g est suspendu en O par un contact mobile. Son extrémité A plonge dans une cuve à mercure par où arrive un courant d'intensité i. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme horizonttale $B = 0{,}05$ T.
Quelle est l'intensité du courant qui permet d'observer une déviation du fil de 30° par rapport à la verticale du point de suspension O?

2. Dans un moteur électrique les fils conducteurs sont disposés suivant les génératrices d'un cylindre de rayon $r = 8$ cm. Chaque fil est parcouru par un courant d'intensité $i = 20$ A et a une longueur utile $L = 10$ cm. Le cylindre portant ces conducteurs tourne dans le champ magnétique radial d'intensité $B = 0{,}2$ T produit par un électroaimant.
Quelle est l'intensité de la force de Laplace agissant sur un fil conducteur? Quel est le moment de cette force par rapport à l'axe du cylindre?
Ce moteur est conçu de telle sorte que 200 fils conducteurs sont simultanément soumis à l'action du champ B. Quelle est sa puissance mécanique s'il tourne à la vitesse de 1 800 tours par minute?

3. Une roue de Barlow de diamètre $D = 10$ cm est entièrement plongée dans un champ magnétique uniforme $B = 0{,}05$ T perpendiculaire au plan de la roue. L'intensité du courant pénétrant dans la roue par son axe est $i = 25$ A. Déterminer le moment du couple électromagnétique qui agit sur la roue, l'ensemble des forces électromagnétiques se réduisant à une force unique s'exerçant au milieu C du rayon OA, O centre de la roue situé sur l'axe de rotation, A contact glissant de la roue avec le mercure; ce contact sera supposé ponctuel.

4. La balance électromagnétique de Cotton est constituée d'un fléau coudé mobile autour d'un axe horizontal O. Le bras horizontal OH de la balance porte en H un plateau qui peut recevoir des masses marquées m. La partie coudée du fléau porte un conducteur OACDEO dont les parties AC et DE sont des arcs de cercles centrés sur O. Le conducteur CD est horizontal dans le prolongement du demi-fléau OH. Soit M le milieu de CD : par construction de la balance $OM = OH = 20$ cm. La longueur du conducteur CD est $CD = 4$ cm.
La balance est en équilibre quand le courant, dans le conducteur CD, est nul. On fait passer, dans cet élément conducteur, un courant $i = 5$ A orienté de C vers D, et on dispose la balance de telle sorte que cet élément conducteur soit en totalité dans l'entrefer d'un électroaimant où règne un champ magnétique uniforme B. Pour maintenir l'équilibre de la balance, il faut placer une masse $m = 625$ mg dans le plateau.
Comment doit être orienté le champ magnétique perpendiculaire à l'élément de courant $i \cdot \overrightarrow{CD}$ pour que l'équilibre de la balance soit possible? On prendra pour intensité du champ de pesanteur terrestre $g = 9{,}8$ m·s.
Montrer que l'action de B sur les conducteurs en arc de cercle parcourus par ce même courant i est sans influence sur l'équilibre de la balance.
Quelle est l'intensité du champ magnétique dans l'entrefer de cet électro-aimant?

5. On dispose d'un cadre conducteur MNPQ (**fig. 10**) comportant n spires isolées électriquement les unes des autres. Ce cadre est mobile autour d'un

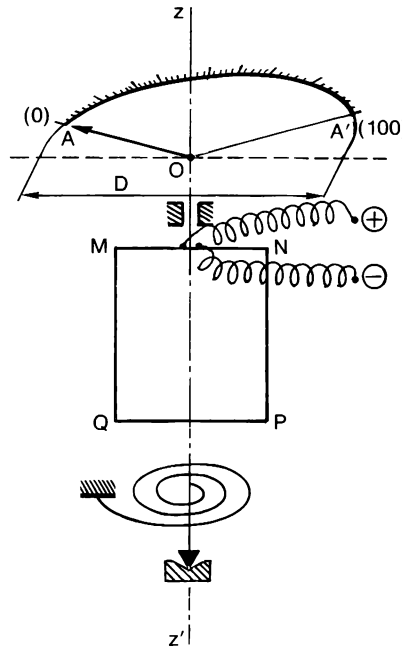


Fig. 10

axe vertical Z'Z. Les frottements des pivots sont considérés comme très faibles.

Ce cadre est solidaire d'une aiguille OA qui peut se déplacer horizontalement le long d'un cadran comportant 100 divisions. $OA = \frac{D}{2}$.

Ce cadre est soumis à l'action d'un ressort spiral à réponse linéaire, cette action étant nulle quand l'aiguille est en A.

Le cadre est plongé à tout instant dans un champ radial qui converge sur l'axe Z'Z.

1° Quel doit être le sens du champ radial pour que l'aiguille dévie vers la droite **(fig. 10)** suivant le sens de l'intensité?

2° Montrer que le cadre doit prendre une position d'équilibre, lorsqu'il est parcouru par une intensité raisonnable. Quelle doit être la valeur de la constante du ressort pour que le calibre de cet ampèremètre soit 50 mA? Exprimer C, valeur de la constante, en fonction des paramètres et faire l'application numérique.

$D = 12$ cm. $\quad n = 100$ spires.

$\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = 120°$. $\quad B = 0{,}1$ T.

$MN = QP = a$. $\quad S = a \cdot b = 2$ cm^2.

$MQ = NP = b$.

1. Le fil est plongé sur toute sa longueur dans le champ magnétique. L'élément de courant $i \cdot \overrightarrow{AO}$ est soumis à la force de Laplace $\vec{F} = i \cdot \overrightarrow{AO} \wedge \vec{B}$ **(fig. 11).** Cette force est perpendiculaire au fil en son milieu son intensité est

$$F = i \cdot AO \cdot B \cdot \sin \frac{\pi}{2}.$$

Le poids du fil et la force de Laplace sont donc des forces concourantes. Quand le fil est en équilibre, la somme des forces appliquées à son centre d'inertie est nulle.
$\vec{P} + \vec{F}$ est donc porté par le fil et opposé à la force exercée en O par le support

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0};$$

$$\sin (30°) = \frac{F}{P} \Rightarrow F = \frac{P}{2}$$

et :

$$i \cdot AO \cdot B = \frac{1}{2} m \cdot g$$

$$\Rightarrow i = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{AO \cdot B} = 10 \text{ A}.$$

Autre méthode. Le fil est en équilibre de rotation autour de l'axe Δ passant par O : les moments par rapport à l'axe de $\vec{F}$ et de $m \cdot \vec{g}$ se compensent (le moment de $\vec{T}$ est nul) :

$$m \cdot g \cdot \frac{OA}{2} \cdot \sin (30°) = i \cdot AO \cdot B \cdot \frac{OA}{2}.$$

On retrouve, après simplification, la même expression pour i.

Fig. 11

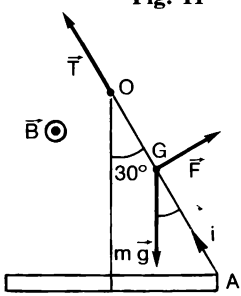
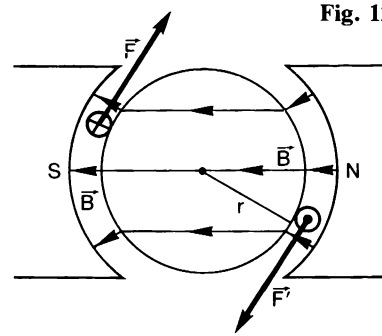


Fig. 12



2. Le champ magnétique étant radial le vecteur champ est perpendiculaire à l'élément de courant quelle que soit sa position dans le champ **(fig. 12).** La force de Laplace agissant sur un fil conducteur est donc :

$$F = i \cdot L \cdot B \Rightarrow F = 20 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2; \quad F = 0{,}4 \text{ N}.$$

Cette force est tangente au cylindre, le bras de levier est donc le rayon du cylindre r :

$$\mathcal{M}_{F\,axe} = F \cdot r; \quad \mathcal{M}_{F\,axe} = 0{,}032 \text{ m} \cdot \text{N}.$$

La puissance est le quotient du travail par le temps mis pour effectuer ce travail. Pour un tour, la force de Laplace agissant sur un élément conducteur effectue un travail $W = 2n \cdot r \cdot F$, soit $W = \mathcal{M}_{F\,axe} \cdot 2\pi$.
Il y a 200 conducteurs (100 en face de chaque pôle) actifs donc, pour un tour du moteur, le travail est :
$W = 200 \cdot 2\pi \cdot \mathcal{M}_{F/axe}$. La puissance est donc, puisque le moteur effectue 1 800 tours en 60 secondes :

$$\mathcal{P} = \frac{200 \cdot 2 \cdot \mathcal{M}_{F\,axe} \cdot 1\,800}{60}, \qquad \mathcal{P} = 1\,206 \text{ W}.$$

3. Toute la roue est dans le champ magnétique uniforme B perpendiculaire à son plan. Le courant i se dirige de l'axe de la roue vers la cuve à mercure, donc tout se passe comme si l'élément de courant était un rayon unique parcouru par un courant de 25 A.
La force de Laplace s'exerce par raison de symétrie au milieu du rayon :

$$\vec{F} = i \cdot \overrightarrow{OA} \wedge \vec{B}$$

$$F = i \cdot \frac{D}{2} \cdot B, \qquad F = 62{,}5 \text{ mN}.$$

Le moment de cette force par rapport à l'axe de rotation est $F \cdot \dfrac{OA}{2}$ puisque le bras de levier est le demi-rayon :

$$\mathcal{M} = 1{,}56 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

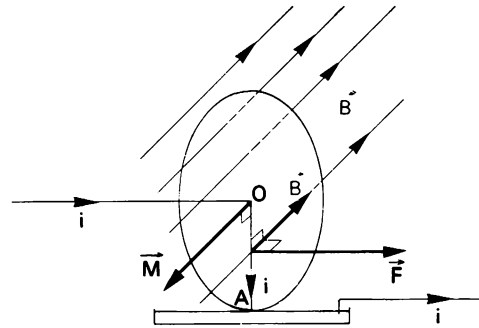


Fig. 13

4. Pour que l'équilibre de la balance soit possible, il faut que la force de Laplace agissant sur l'élément de courant $i \cdot \overrightarrow{CD}$ soit verticale et orientée de haut en bas. Le champ magnétique doit donc venir vers nous sur le schéma. La balance est alors en équilibre si la force de Laplace a même mesure que le poids des masses placées dans le plateau.

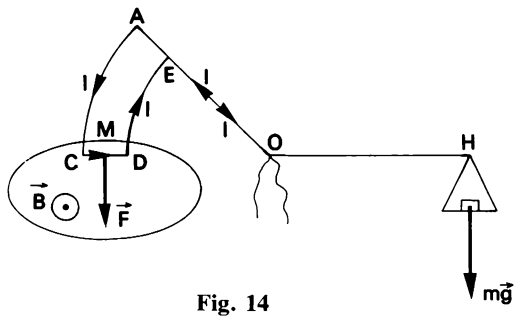


Fig. 14

La force de Laplace agissant sur un conducteur en arc de cercle est perpendiculaire à l'élément de courant $i \cdot \overrightarrow{dL}$. Elle a donc une ligne d'action passant par le centre de courbure de ce conducteur. Son moment par rapport à l'axe de rotation du fléau est donc nul : elle n'a pas d'effet sur l'équilibre de la balance.
A l'équilibre de la balance $F = m \cdot g$ avec $F = i \cdot \mathrm{CD} \cdot B$,

$$B = \frac{m \cdot g}{i \cdot \mathrm{CD}} = 0{,}031 \text{ T}.$$

5. **1°** Si le courant parcourt le cadre dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, le champ radial doit être orienté comme sur le schéma **(fig. 15).**
Les forces magnétiques agissant sur les côtés MN et PQ sont nulles car le courant est coaxial avec le champ magnétique.
Les côtés MQ et NP sont soumis respectivement aux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ qui ont même module F, indépendant de l'orientation, puisque le champ est radial. La module de F sera

$$F = n \cdot b \cdot B \cdot i$$

2° Le couple exercé sur le cadre aura un moment

$$\mathcal{M}_1 = F \cdot a = n \cdot b \cdot B \cdot i \cdot a = n \cdot S \cdot B \cdot i.$$

Le couple antagoniste exercé par le ressort spiral à réponse linéaire sera $\mathcal{M}_2 = -C \cdot \alpha$ de signe opposé à α exprimé en radians. On prendra α positivement dans le sens indiqué sur le schéma. Le cadre prend sa position d'équilibre lorsque le moment résultant autour de Z'Z est nul.

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = 0 \Leftrightarrow n \cdot S \cdot B \cdot i - C \cdot \alpha = 0$$

$$C = \frac{n \cdot S \cdot B \cdot i}{\alpha}.$$

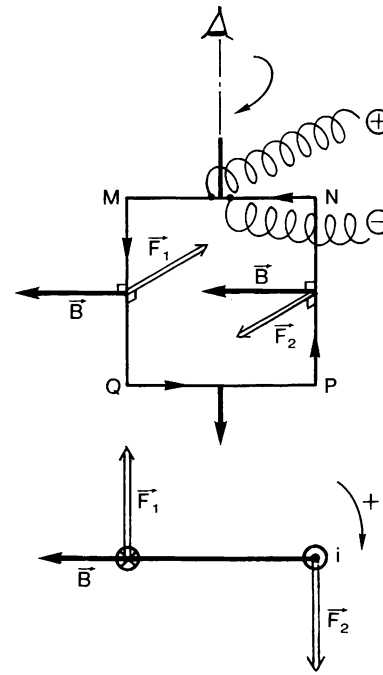


Fig. 15

On veut que $\alpha = 120° \sim 2{,}09$ rad. Si $i = 50$ mA.

$$C = \frac{n \cdot S \cdot B \cdot i}{\alpha} = \frac{10^2 \times 2 \cdot 10^{-4} \times 0{,}1 \times 50 \cdot 10^{-3}}{2{,}09} = 4{,}77 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{N} \cdot \text{rad}^{-1}$$

13 INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE FORCE ÉLECTROMOTRICE INDUITE

INDUCTION PAR DÉPLACEMENT D'UN CONDUCTEUR DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME.

Quand on déplace un conducteur métallique dans un champ magnétique uniforme, tous les porteurs de charges, au repos par rapport au conducteur ou en mouvement d'agitation thermique, sont entraînés par le mouvement du conducteur et ont dans un repère extérieur fixe une vitesse $\vec{V}$ égale à la vitesse du conducteur dans ce repère : ces porteurs de charges sont donc soumis à la force de Lorentz $\vec{f} = q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$ et les charges mobiles dans le conducteur sont défléchies dans la direction de $\vec{f}$.

1. Si le conducteur mobile est isolé, le déplacement des électrons conduit à une dissymétrie électrique qui produit dans le conducteur mobile un champ électrique $\vec{E}$ s'opposant au vecteur $\vec{V} \wedge \vec{B}$ (*). En régime permanent, on obtient un état d'équilibre : $\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} = \vec{0}$. Il existe alors, entre les extrémités du conducteur une différence de potentiel U_{AB}, qui correspond à la circulation du champ électrique $\vec{E}$ entre A et B **(fig. 1)** :

$$U_{AB} = \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

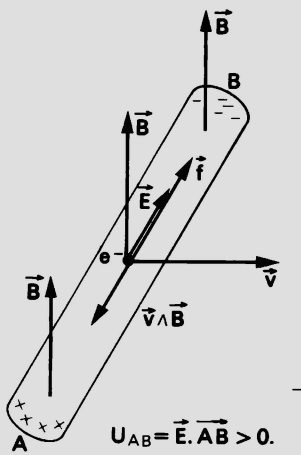


Fig. 1

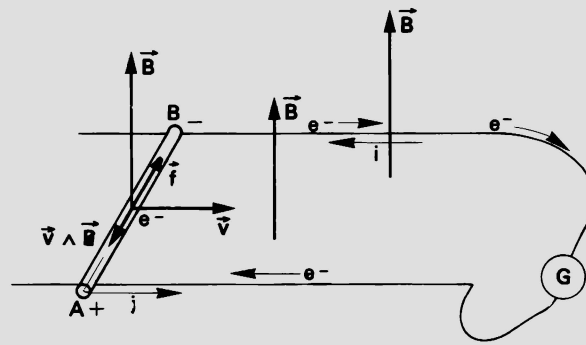


Fig. 2

(*) Le champ $\vec{E}$ n'existe que là où $\vec{V} \wedge \vec{B}$ existe : c'est la raison pour laquelle le champ $\vec{V} \wedge \vec{B}$ est appelé champ électromoteur.

2. Si le conducteur mobile fait partie d'un circuit fermé (éventuellement en partie fixe cf. **fig. 2**), l'accumulation de charges ne peut avoir lieu : on observe alors dans le circuit le passage d'un courant électrique i, dans le sens de $\vec{V} \wedge \vec{B}$. (Noter que le sens des électrons est celui de la force de Lorentz : $q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$, $q < 0$).

Dans le cas d'un conducteur rectiligne, de longueur L, se déplaçant à la vitesse constante $\vec{V}$ perpendiculaire aux lignes du champ magnétique uniforme $\vec{B}$, la f.é.m. induite est donnée par :

$$e = V \cdot B \cdot L.$$

e : en volts; V : en $m \cdot s^{-1}$; B : en teslas (T); L : en m.

FLUX MAGNÉTIQUE. PROPRIÉTÉS

1. Flux de $\vec{B}$ à travers une surface S(*).

— **Le flux magnétique** *φ embrassé par une boucle de courant,* d'aire S ($\vec{S}$ orientée en fonction du sens de déplacement du tire-bouchon qui tourne dans le sens de i), est donné par la relation : $\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ **(fig. 3).**

Il est maximum si $\vec{B}$ et $\vec{S}$ sont de même sens, nul si $\vec{B}$ et $\vec{S}$ sont perpendiculaires.

Unité de flux magnétique : le weber (Wb) ou $(T \cdot m^2)$.

Nota : le sens de $\vec{S}$ définit la face Nord de la boucle.

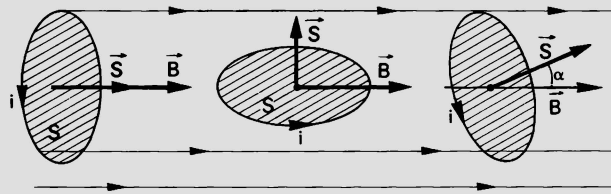


Fig. 3 $\varphi = B.S$ $\varphi = 0$ $\varphi = B.S.\cos\alpha$

— **Flux à travers une bobine plongée dans un champ magnétique uniforme :**

$\varphi = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S}$, S : surface d'une spire, N : nombre de spires.

(*) Le calcul du flux magnétique pour un circuit quelconque (et donc une surface quelconque) et pour des champs non uniformes est impossible à expliciter en classe de Terminales car il fait appel à la notion d'intégrale de surface qui ne peut s'étudier qu'en classes supérieures. Il faut d'abord remarquer que la notion de flux est reliée à une surface et non pas à celle d'un circuit (le circuit n'intervient ici que comme courbe fermée orientée par le sens d'un courant, l'intensité de ce courant n'intervenant pas dans la définition du flux). Quand on prend une surface non fermée, elle est limitée par un contour — une frontière — : courbe fermée, qui n'est autre que le « fameux circuit », une fois la courbe orientée. Le flux magnétique à travers la surface se calcule en sommant les flux élémentaires obtenus en découpant la surface en de petits éléments « plans ». La propriété pour le flux d'être conservatif se traduit par le fait que le flux ainsi calculé est indépendant de la surface choisie ne dépendant que de son contour orienté (car le flux est algébrique) : on pourra alors parler du flux à travers un circuit. Pour la même raison, le flux coupé au cours du déplacement d'un circuit sera égal à la variation de flux à travers le circuit entre les positions initiale et finale. Bien sûr, pour que des effets d'induction électromagnétique puissent apparaître dans une boucle (courbe fermée) il faudra que cette boucle soit conductrice pour permettre le passage d'un courant.

2. Propriétés du flux :

— **Le flux est conservatif** (*) : il a même valeur à travers toutes les surfaces qui prennent appui sur un même tube de champ **(fig. 4).**

— **Règle du flux maximum.**

Un circuit parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique est soumis à des torsions qui tendent à le déplacer où à le déformer (ce sont des forces de Laplace) pour que le *flux entrant par sa face sud soit maximum.*

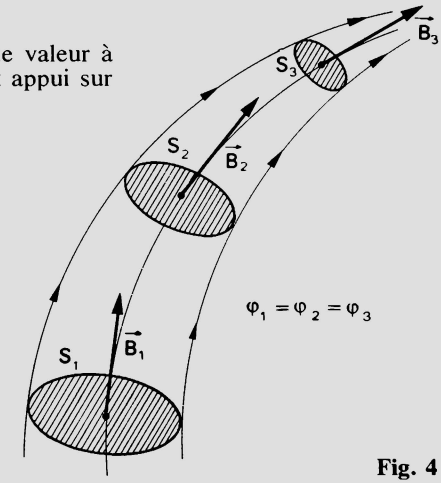


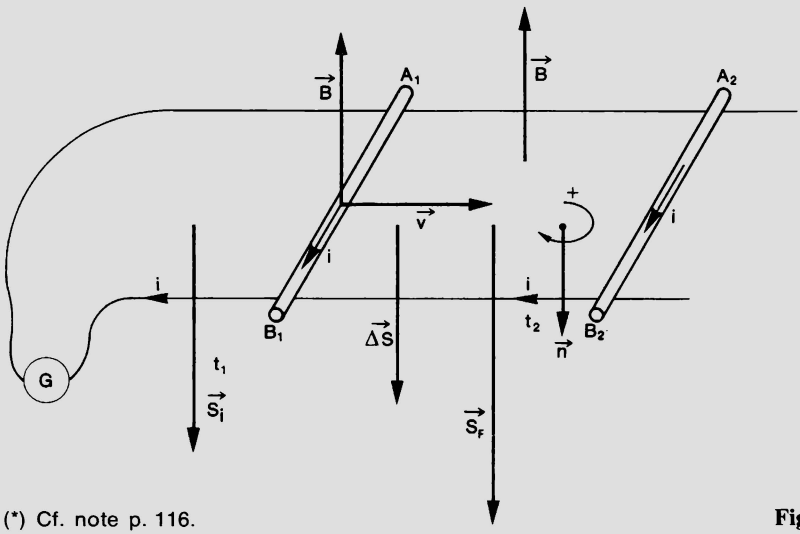
Fig. 4

3. Flux coupé **(fig. 5)**

Considérons une portion de circuit A_1B_1 rectiligne mobile dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ qui lui est perpendiculaire. Ce conducteur mobile se déplace avec une vitesse $\vec{V}$. Le vecteur vitesse $\vec{V}$ est orthogonal au conducteur mobile et au champ magnétique. Pendant un intervalle de temps Δt ce conducteur s'est déplacé de la position A_1B_1 à la date t_1 à la position A_2B_2 à la date t_2. La variation de flux dans ce circuit pendant cette durée : $\Delta t = (t_2 - t_1)$ est, par définition, le flux coupé par le circuit :

$$\varphi_c = \vec{B} \cdot \Delta\vec{S} \quad (\Delta\vec{S} = \vec{S}_f - \vec{S}_i).$$

Remarquer que le circuit ayant été orienté dans le sens du courant induit qui y a pris naissance, φ_c est ici négatif ($\Delta\vec{S}$ est opposé à $\vec{B}$).



(*) Cf. note p. 116.

Fig. 5

INDUCTION PAR VARIATION DE FLUX

1. Cas du circuit se déplaçant dans un champ magnétique uniforme (cf. fig. 5)

On sait que la f.é.m. induite s'écrit : $e = B \cdot L \cdot V$.
Pendant le temps Δt, le circuit s'est déplacé de $\Delta l = V \cdot \Delta t$, entraînant une variation de surface $\Delta S = L \cdot V \cdot \Delta t$ et un flux coupé, *donc une variation de flux à travers le circuit, puisque le flux est conservatif* : $\Delta\varphi = B \cdot \Delta S = B \cdot L \cdot V \cdot \Delta t$; en fait, compte tenu des conventions de signe, on voit que la variation de flux doit être ici considérée comme négative :

$$\Delta\varphi = -B \cdot L \cdot V \cdot \Delta t.$$

On déduit facilement : $e = B \cdot L \cdot V \cdot = -\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Remarque : si le déplacement ne se fait plus à vitesse constante et si le champ n'est plus uniforme, il faut raisonner sur un temps élémentaire très court; la f.é.m. instantanée sera donnée par : (*)

$$e = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

2. Généralisation

Il existe d'autres moyens de faire varier le flux à travers un circuit, autrement qu'en le déplaçant; ainsi on peut déformer le circuit ou faire varier l'intensité du champ magnétique (en jouant sur les courants qui l'ont créé ou en déplaçant un aimant)...; on constate que quelle que soit la manière dont on fait varier le flux à travers un circuit, il apparaît une f.é.m. d'induction donnée par la relation :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

— **Si le circuit est fermé :** il y aura apparition d'un courant induit qui s'écrira : $i = \dfrac{e}{R} = -\dfrac{1}{R} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ (R : résistance totale du circuit).
Pendant le temps que dure le phénomène, le courant débitera une charge q, vérifiant $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$; soit pour une durée τ :

$$q = \int_0^\tau i \cdot \mathrm{d}t = -\frac{1}{R}\int_0^\tau \mathrm{d}\varphi = -\frac{\Delta\varphi}{R}.$$

— ***Si le circuit est ouvert :*** il ne peut y avoir de courant. Il existera aux bornes du circuit une *tension* ou *différence de potentielle* égale à la f.é.m. d'induction. Le phénomène est mesurable au moyen d'un voltmètre électronique.

(*) Par convention de signe, e est positif, compte tenu du sens de courant, qui lui est intervenu pour définir le sens algébrique du calcul de φ.

3. Loi de Lentz

Le courant induit se trouve lui-même soumis à l'action de $\vec{B}$ (loi de Laplace); la loi de Lentz stipule que le sens du courant induit est elle que ses effets tendent à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance(*).

EXERCICES

1. Quelle est l'intensité d'un champ magnétique uniforme si on mesure un flux de 0,01 weber à travers une surface de 5 dm^2 normale aux lignes de champ?

Réponse : $\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S}$; $B = \dfrac{0{,}01}{0{,}05} = 0{,}2$ T.

2. L'intensité de la composante horizontale du champ magnétique terrestre est $B_h = 20$ μT en un lieu où l'inclinaison des lignes de champ vers le sol est 64° par rapport au plan horizontal. Un cadre rectangulaire formé de 100 spires de 10 cm^2 de section. Le cadre étant vertical perpendiculaire à $\vec{B}_h$, on le fait pivoter de 90° autour d'un axe perpendiculaire aux lignes de champ. Quelle est la variation du flux au cours de ce mouvement si celui-ci est effectué dans le sens des aiguilles d'une montre?

Réponses : $B_h = 20$ μT, $\tan 64° = \dfrac{B_v}{B_h}$; $B_v = 41$ μT.

Dans la position initiale : $\varphi_1 = n \cdot \vec{B}_h \cdot \vec{S}$: $\varphi_1 = 100 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \cdot 10^{-6}$,
$\varphi_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ Wb.

Dans la position finale : $\varphi_2 = n \cdot \vec{B}_v \cdot \vec{S}$: $\varphi_2 = 4{,}1 \cdot 10^{-6}$ Wb, la variation du flux est $\varphi_2 - \varphi_1 = 2{,}1 \cdot 10^{-6}$ Wb.

3. Un solénoïde comporte 10 spires par centimètre, la surface d'une spire est 10 cm^2. Les spires sont parcourues par un courant $i = 5$ A. Une deuxième bobine est placée dans le solénoïde ayant le même axe. Cette seconde bobine est formée de 100 spires de section 8 cm^2. La résistance de cette bobine est $r = 50\ \Omega$; elle est reliée à un galvanomètre utilisé en balistique de résistance, 250 ohms sur le cadran duquel une division correspond à 0,1 μC.
Quelle est la quantité d'électricité induite dans la seconde bobine quand on coupe le courant dans la première? Quelle est la déviation du galvanomètre?

Réponses : champ magnétique dans le solénoïde

$$B_i = \mu_0 \cdot n \cdot i \ : \ B_i = 6{,}28 \text{ mT}.$$

Ce champ produit dans la seconde bobine un flux

$$\varphi = N \cdot B_i \cdot S; \ \varphi = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}.$$

(*) C'est une loi de modération. Par exemple, dans le cas d'un circuit se déplaçant dans un champ uniforme, les forces de Laplace qui vont s'exercer sur le circuit parcouru par le courant induit *i*, vont s'opposer au déplacement qui lui a donné naissance (et ce sont ces forces-là qu'il faudra vaincre pour pouvoir déplacer le circuit à vitesse uniforme!). C'est donc un phénomène régulateur; sinon il suffirait de « lancer » le circuit dont le mouvement serait ensuite « auto-accéléré »!

La variation du flux est $\Delta\varphi = -5 \cdot 10^{-4}$ Wb.
La résistance du circuit est 300 Ω la quantité d'électricité induite est $q = 1{,}67$ μC, soit une déviation de 16,7 divisions.

4. Le flux sortant du pôle nord d'un aimant est $3 \cdot 10^{-4}$ Wb, on introduit ce pôle dans une bobine de 50 spires faisant partie d'un circuit fermé de résistance $r = 200$ ohms. Le déplacement de l'aimant est effectué en $5 \cdot 10^{-2}$ s. Quelle est la force électromotrice induite et la quantité d'électricité induite?
Réponse : $\varphi_f = -50 \cdot 3 \cdot 10^{-4} = -15 \cdot 10^{-3}$ Wb, $e = +0{,}3$ V, $q = 7{,}5 \cdot 10^{-5}$ C (le courant induit s'oppose à l'augmentation du flux).

5. Une boucle rectangulaire se déplace dans un champ magnétique uniforme de telle façon que la force électromotrice soit et reste nulle. Décrivez les façons dont la boucle peut se déplacer?
Réponse : soit $\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{PQ}$ un vecteur dont la norme est égale à la surface de la boucle. Appelons-le $\vec{S}$. Pour qu'il n'y ait pas de force électromotrice induite il ne faut pas que le produit $\vec{B} \cdot \vec{S}$ varie au cours du déplacement. La boucle doit rester parallèle à elle-même au cours du temps. Il ne faut pas que son orientation par rapport à $\vec{B}$ varie. De plus, elle ne doit pas sortir de la région où le champ est uniforme.

6. Une boucle rectangulaire est disposée perpendiculairement aux lignes de champ entre les pôles d'un électroaimant. Elle se déplace à vitesse constante $\vec{V}$. Montrez qu'il existe un courant induit quand l'un des côtés de la boucle sort de la région où le champ est uniforme et pénètre dans une région où le champ est beaucoup plus faible au-delà du bord des pôles.
Réponse : si le champ n'est pas constant en tout point de la surface S, le déplacement de la boucle entraîne des variations du flux $\varphi = \Sigma \vec{B}_i \cdot \vec{s}_i$ avec $\Sigma \vec{s}_i = \vec{S}$, surface de la boucle.
La variation du flux correspond à une force électromotrice induite $e = -\dfrac{d\varphi}{dt}$.

7. Le résultat de l'exercice 6 est-il modifié si on déplace l'électroaimant en maintenant la boucle fixe?
Réponse : la boucle qui est fixe par rapport à un repère extérieur est en mouvement par rapport à un repère lié à l'électroaimant : que la boucle ou que l'aimant se déplace il y aura toujours un flux coupé, donc des champs électromoteurs induits d'intensité différentes si les champs sur les côtés n'ont pas la même intensité. La circulation du champ électromoteur le long du circuit fermé sera nulle si $\vec{B}$ est constant et non nulle si $\vec{B}$ est plus faible sur une partie du circuit : il y aura donc dans ce dernier cas un courant induit.

8. La composante horizontale du champ magnétique terrestre est $B_h = 20$ μT en un lieu où l'inclinaison des lignes de champ vers le sol est de 64° par rapport au plan horizontal. Un avion vole à la vitesse $V = 800$ km·h^{-1} selon la direction et le sens de $\vec{B}_h$, son envergure est $L = 20$ m. Quelle tension existe-t-il entre les extrémités des ailes? Peut-on la mesurer à l'aide d'un voltmètre installé à bord de l'avion?
Réponses : $V = 222$ m·s^{-1}; $\tan 64° = \dfrac{B_v}{B_h}$; $B_v = 41$ μT; $U = V \cdot B \cdot L = 0{,}18$ V.
Cette tension n'est pas mesurable à l'aide d'un appareil installé à bord car l'appareil de mesure constitue un générateur en opposition il ne peut passer de courant dans le circuit : l'aiguille du voltmètre ne peut dévier.

9. Un solénoïde est disposé de telle sorte que son axe soit vertical. Les spires sont parcourues par un courant produisant un champ magnétique $\vec{B}_i$ orienté de bas en haut, d'intensité $B_i = 0{,}001$ T.
Un cadre rectangulaire, situé dans un plan vertical, est lâché sans vitesse initiale et tombe à l'intérieur du solénoïde. Ce mouvement peut-il induire un courant dans la spire formant le cadre?

Réponse : les lignes du champ magnétique sont parallèles au plan du cadre. Les vecteurs vitesse et champ magnétique ont même droite support : la verticale; le champ électromoteur est donc nul puisque $\vec{V}$ et $\vec{B}$ font un angle égal à π.
Il ne peut y avoir de courant induit dans la spire.

10. Un conducteur rectiligne CD de l'ongueur $L = 0{,}2$ m est fixé suivant une génératrice d'un cylindre d'axe Z'Z de rayon $R = 0{,}1$ m. Ce cylindre tourne à vitesse constante $\omega = 20$ tours par seconde. Dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$: $B = 0{,}1$ T.

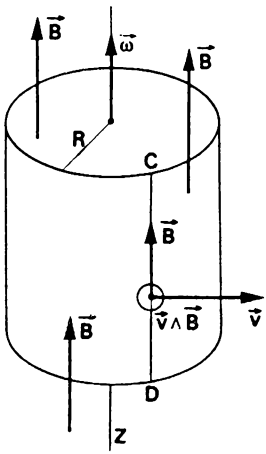


Fig. 6

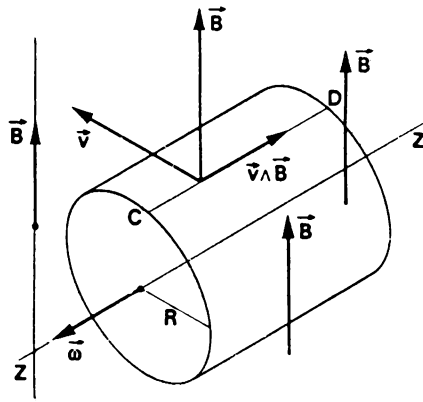


Fig. 7

a) $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{B}$ sont parallèles au cours du mouvement **(fig. 6).**
b) $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires au cours du mouvement **(fig. 7).**
Que peut-on dire dans chacun des cas de la tension U_{CD}?
Réponses :
• Si $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{B}$ sont parallèles, $V = \omega \cdot R$; $\vec{V}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$; $\vec{V} \wedge \vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{V}$ et à $\vec{B}$, donc au conducteur $\overrightarrow{CD} \cdot U_{CD} = 0$, quel que soit le sens de rotation. Le champ électromoteur est perpendiculaire au conducteur donc sa circulation le long du conducteur est nulle.
• Si $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires $\vec{V} \wedge \vec{B}$ est orienté selon le conducteur : la différence de potentiel U_{CD} est positive ou négative selon le sens de rotation du cylindre; elle s'annule et change de signe quand $\vec{V}$ et $\vec{B}$ ont même ligne d'action. La tension U_{CD} est une tension alternative.

1. Un galvanomètre de résistance interne $r = 600\ \Omega$ est utilisé en balistique pour mesurer une quantité d'électricité induite par le retournement dans un champ magnétique uniforme B d'intensité $B = 0{,}02$ T d'une bobine de 1 000 spires de résistance $R = 200\ \Omega$, de section $S = 20\ \text{cm}^2$ perpendiculaire aux lignes de ce champ.

1° Quelle est la variation de flux correspondant à ce déplacement?

2° Quelle est la force électromotrice induite si le retournement face pour face est fait en 0,01 s?

3° Quelle est l'intensité moyenne du courant induit?

4° Quelle est la quantité d'électricité induite mesurée par le galvanomètre?

2. Supposons que le champ magnétique entre les pôles d'un électroaimant ait pour intensité dans l'entrefer $B = 0{,}5$ T et soit nul ailleurs. Que le cadre MNPQ rectangulaire de dimensions MN = 5 cm, MQ = 8 cm, perpendiculaire aux lignes de champ soit disposé comme l'indique la figure le côté MN à l'extérieur de l'entrefer. La résistance du cadre est $r = 5$ ohm. Il se déplace à la vitesse constante $V = 2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

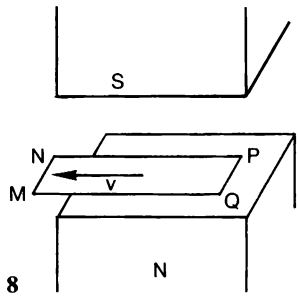


Fig. 8

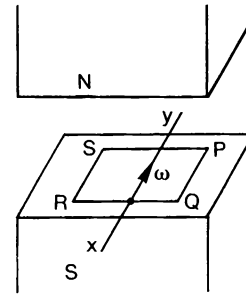


Fig. 9

Quelle est la valeur du champ électromoteur sur les côtés du cadre?
Quelle est la circulation du champ électromoteur le long du circuit fermé?
Calculer la force électromotrice induite à partir de la variation du flux.
Quel est le courant induit dans le circuit?
Quelle est la force de Laplace agissant sur le conducteur PQ?
La boucle sera-t-elle plus facile à tirer si on augmente sa résistance?

3. Une boucle rectangulaire PQRS est mobile en rotation uniforme autour d'un axe XY dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ d'intensité $B = 0{,}5$ T produit par un électroaimant. Dimensions de la boucle : PS = QR = 5 cm; PQ = RS = 8 cm.

1° A l'instant $t = 0$ le cadre est perpendiculaire aux lignes de champ. Le mouvement de rotation ayant lieu dans le sens des aiguilles d'une montre, déterminer le champ électromoteur sur chaque côté de la boucle.

2° Reprendre la même question quand le cadre a tourné de $\frac{\pi}{2}$.

3° En prenant pour origine la position de la boucle dans la question **1°**, exprimer la variation du flux à travers la bobine en fonction du temps si elle tourne à la vitesse $\omega = 10$ tours par secondes. En déduire la force électromotrice induite en fonction du temps.

4. Deux rails XX′ et YY′ parallèles et horizontaux sont distants de 1,5 m. Ils sont placés dans un plan horizontal perpendiculairement aux lignes de champ d'un champ magnétique uniforme d'intensité $B = 0{,}01$ T, orienté de bas en haut. Les deux rails sont réunis en XY par un galvanomètre de résistance $r = 300\ \Omega$. Un conducteur métallique rigide MN, perpendiculaire aux deux rails, glisse sans frottement en s'éloignant de XY à la vitesse $V = 2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. M est sur le rail XX′.

1° Quelle est la force électromotrice induite dans le circuit?

2° Quelle est l'intensité et le sens du courant induit?

5. Un rail conducteur a la forme d'une circonférence de rayon $r = 0{,}5$ m de centre O. Elle est disposée horizontalement, perpendiculairement aux lignes d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ d'intensité $B = 0{,}1$ T, orienté de bas en haut. Un rayon OA conducteur rigide tourne sans frottements à la vitesse $\omega = 10\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ dans le sens des aiguilles d'une montre. A glisse sur le rail en établissant le contact électrique. Un fil souple relie le centre de la circonférence O au rail en passant par un galvanomètre de résistance $r = 1\,000\ \Omega$ devant laquelle on néglige toutes les autres résistances du circuit.

1° Quelle est la force électromotrice induite?

2° Quelle est l'intensité du courant dans le circuit?

6. On place, à l'intérieur d'un solénoïde de longueur $L = 30$ cm formé de 1 000 spires, une bobine plate de section 5 cm^2 formée de 50 spires ayant même axe que le solénoïde.

1° A la date $t = 0$, on ferme un circuit permettant d'envoyer dans le solénoïde un courant $I = 10$ A qui s'établit en 0,01 seconde. Quelle tension apparaît aux bornes de la bobine plate?

2° Le régime permanent étant atteint, on coupe le courant dans le solénoïde. L'intensité passe de $I = 10$ A à $I = 0$ en 0,01 s. Quelle tension apparaît aux bornes de la bobine plate?

3° Cette bobine plate est reliée à un galvanomètre balistique, la résistance du circuit est $1\,000\ \Omega$. La mesure de la quantité d'électricité induite permet-elle de déterminer le champ magnétique dans le solénoïde?

7. Pour mesurer le champ magnétique uniforme entre les deux pôles d'un aimant en U, on réalise l'expérience suivante. On place entre les pôles une bobine plate de section 5 cm^2 formée de 50 spires, cette bobine étant reliée à un galvanomètre balistique de résistance $R = 900\ \Omega$. On mesure la charge électrique traversant le galvanomètre quand on retourne la bobine face pour face, l'axe de la bobine étant confondu avec une ligne de champ magnétique. La charge mesurée dépent-elle de la durée de l'opération?
On a observé une déviation du spot du galvanomètre de 20 divisions. Un condensateur de capacité $C = 0{,}1\ \mu\text{F}$, chargé sous la différence de potentiel $U = 1{,}5$ V, produit une même déviation du spot quand on le relie au galvanomètre alors qu'il vient d'être chargé dans les conditions indiquées. Quelle est l'intensité du champ magnétique entre les pôles de cet aimant? On négligera la résistance de la bobine devant celle du galvanomètre.

8. Pour mesurer le flux sortant du pôle nord d'un aimant droit on réalise l'expérience suivante. L'aimant étant introduit dans une bobine plate de dimensions voisines de celle de l'aimant, on le retire rapidement et on mesure, sur un galvanomètre balistique, la déviation du spot. La résistance du circuit formé par la bobine et le galvanomètre est $R = 1\,000\ \Omega$. La déviation du spot dépend-elle de la rapidité de l'opération? Que faudrait-il

introduire dans le circuit pour observer une déviation moitié à la suite de la même opération?
Un condensateur de capacité 0,1 μF, chargé sous la tension de 1 volt, produit une déviation du spot quand on le décharge dans le galvanomètre de 10 divisions.
Un condensateur de capacité 0,25 μF, chargé sous la tension de 1 V, produit, dans les mêmes conditions, une déviation du spot de 25 divisions.
Quel est le flux sortant du pôle nord de l'aimant si on a observé une déviation du spot de 20 divisions à la suite du retrait de l'aimant?

9. **1°** Une bobine longue, fixe d'axe horizontal comporte 800 spires par mètre. Les spires sont parcourues par un courant I d'intensité $I = 10$ A. Quel est le champ magnétique dans ce solénoïde? On dispose, au centre de ce solénoïde, une bobine plate mobile d'axe vertical ZZ' : sa section est $S = 5$ cm^2; elle est formée de 450 spires. A la date $t = 0$, les deux bobines ont même axe et les spires sont enroulées dans le même sens. Quel est le flux du champ magnétique à travers la bobine plate?
Quelle est la variation du flux si on la fait pivoter de 45° dans le sens des aiguilles d'une montre?

2° Cette bobine est reliée à un galvanomètre balistique de résistance $r = 1\,000\ \Omega$.
Quelle est la charge mesurée par ce galvanomètre quand on coupe le courant dans le solénoïde en fonction de l'angle que font les axes des deux bobines?

3° On fait maintenant tourner la bobine plate à la vitesse de 10 tours par seconde dans le sens des aiguilles d'une montre. Quelle est la force électromotrice induite dans la bobine en mouvement quand les spires du solénoïde sont parcourues par le courant constant $I = 10$ A?
Quelle est l'intensité du courant induit?
Pourquoi n'observe-t-on pas de déviation du galvanomètre? Que faut-il faire pour mesurer l'intensité de ce courant?
La résistance de la bobine plate est négligeable devant celle du galvanomètre.

SOLUTIONS

1. **1°** La bobine doit être orientée, le courant induit s'opposant à la variation du flux. Choisissons donc, comme sens positif, le sens du courant induit. La surface des spires est orientée dans le sens du champ magnétique $\vec{B}$.

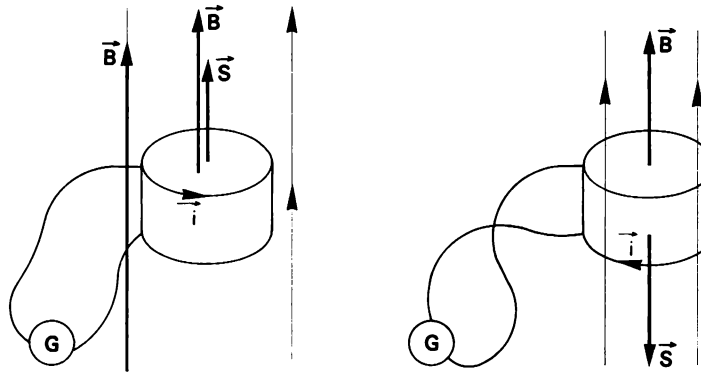


Fig. 10

Le flux initial est donc positif

$$\varphi_i = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} \Rightarrow \varphi_i = 1\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 20 \cdot 10^{-4};$$
$$\varphi_i = 4 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}.$$

En fin de mouvement la surface des spires et le champ magnétique sont opposés :

$$\varphi_f = -N \cdot B \cdot S = -4 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}.$$

La variation du flux est donc :

$$\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i; \quad \Delta\varphi = -8 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}.$$

2° La force électromotrice induite est donc :

$$e = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} : \; e = 8 \text{ V};$$

donc e est positif dans le sens du courant induit, ce qui est normal.

3° L'intensité du courant induit est :

$$i = \frac{e}{r+R}; \quad i = 0{,}01 \text{ A}.$$

4° Quantité d'électricité induite :

$$q = -\frac{\Delta\varphi}{r+R}; \quad q = 10^{-4} \text{ C}.$$

2. Tous les côtés du cadre ont la vitesse $\vec{V}$.
Le champ électromoteur $\vec{V} \wedge \vec{B}$ n'existe que si $\vec{B}$ est différent de $\vec{0}$. Il a le sens de $\overrightarrow{QP}$, sa norme est $V \cdot B \sin \frac{\pi}{2} = 1 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

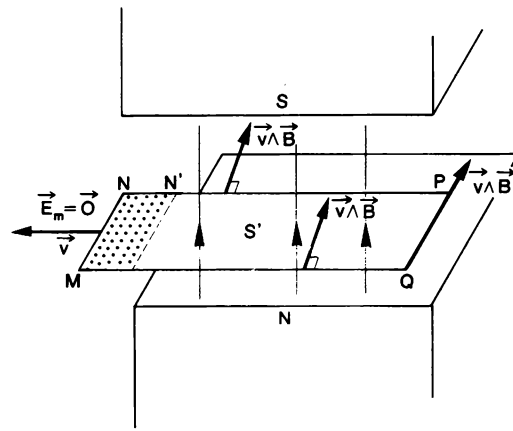


Fig. 11

La circulation de E_m est nulle sur NP et MQ : il y a orthogonalité des deux vecteurs.
La circulation de E_m sur MN est nulle : $E_m = 0$ car $B = 0$.
La circulation de E_m sur QP est égale à $V \cdot B \cdot Q \cdot P = 0{,}05$ V.

Le flux de $\vec{B}$ à travers le cadre est le produit de $\vec{B}$ par la surface du cadre située dans l'entrefer. Si on oriente le circuit dans le sens de $\vec{V} \wedge \vec{B}$: $\vec{S} = \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{PN'}$, N' point où PN sort du champ $\vec{B}$: $PN' = L - V \cdot t$.
On a donc : $\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S}$.
Force électromotrice induite :

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}, \quad e = -\frac{d\left(B \cdot QP \cdot (L - V \cdot t)\right)}{dt};$$

$$e = B \cdot QP \cdot V, \quad e = 0{,}05 \text{ V}.$$

Courant induit dans le circuit : $i = \frac{e}{r}$, $i = 0{,}01$ A.

Le conducteur $\overrightarrow{QP}$, parcouru par le courant i, est soumis à la force de Laplace :

$$\vec{F} = i \cdot \overrightarrow{QP} \wedge \vec{B} \; : \; F = i \cdot QP \cdot B = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ N}.$$

Si on augmente la résistance r, l'intensité du courant induit diminue donc également la force de Laplace opposée à la vitesse. La boucle est donc plus facile à déplacer.

3. 1° $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan du cadre dans la position qu'il occupe à la date $t = 0$. Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est dirigé de X vers Y. Soit M un point du cadre : Le vecteur vitesse $\vec{V}$ est nul si M est sur l'axe, de module $V = \omega \cdot R$ pour tous les autres points. Ce vecteur $\vec{V}$ est perpendiculaire au plan du cadre donc de même sens que $\vec{B}$ ou de sens opposé suivant le point M considéré. Il en résulte que le champ électromoteur $\vec{V} \wedge \vec{B}$ est nul en tout point. Il n'y a donc pas de champ électromoteur quand le cadre occupe cette position : le courant induit est nul.

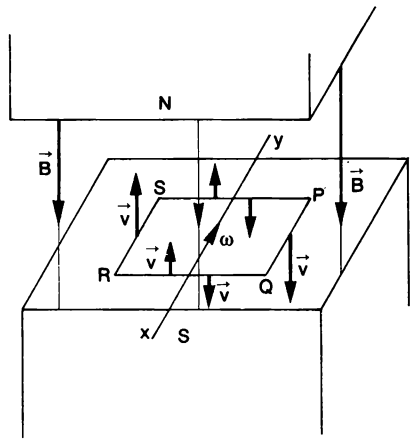


Fig. 12 $\omega t = 0$

2° Quand le cadre a tourné de $\frac{\pi}{2}$, les vecteurs vitesse sont horizontaux. Sur PQ et RS, ils sont de même norme mais de sens contraire : $V = \omega \cdot \frac{PS}{2}$.
Le champ électromoteur $\vec{V} \wedge \vec{B}$ a le sens de $\overrightarrow{RS}$ sur le conducteur RS et $\overrightarrow{PQ}$ sur le conducteur PQ.

On a donc deux champs électromoteurs dont les effets vont s'ajouter. Sur PR et QS les champs électromoteurs ne sont pas constants; ils s'annulent et change de sens en passant l'axe de rotation. La circulation sur ces segments est nulle.

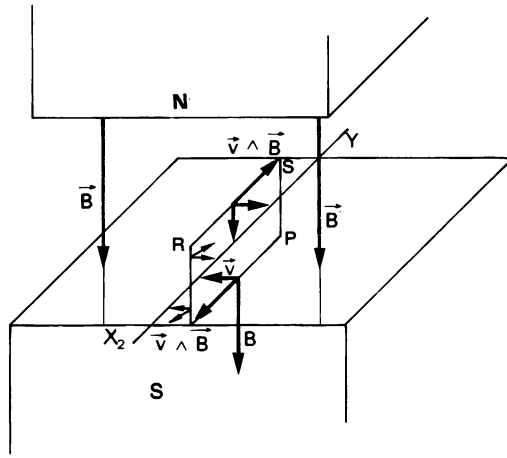


Fig. 13 $\omega t = \pi/2$

On a donc pour force électromotrice induite à cet instant :

$$e = \omega \cdot \frac{PS}{2} \cdot B \cdot PQ + \omega \cdot \frac{PS}{2} \cdot B \cdot RS;$$

$$e = \omega \cdot B \cdot PS \cdot PQ;\ e = 20 \cdot \pi \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}08;\ e = 0{,}126 \text{ V}.$$

3° Le flux de $\vec{B}$ à travers la spire s'écrit $\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S}$, $\vec{S} = \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{QR}$;

$\varphi = B \cdot S \cos(\omega \cdot t)$

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -B \cdot S \cdot (-\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)).$$

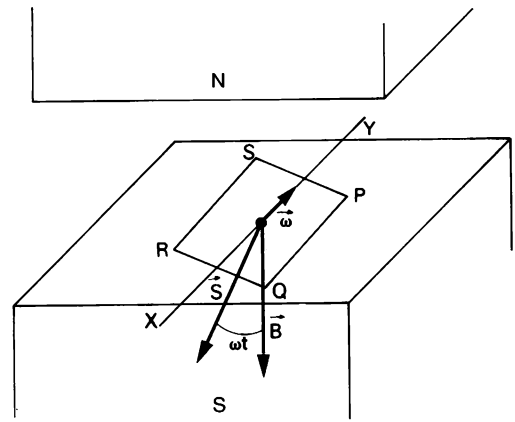


Fig. 14 ωt est quelconque

Pour $t = 0$, $\sin(\omega \cdot t) = 0$, la force électromotrice induite est nulle; pour $\omega \cdot t = \frac{\pi}{2}$, $\sin(\omega \cdot t) = 1$, $e = B \cdot S \cdot \omega$, avec $S = \text{PS} \cdot \text{PQ}$.

On retrouve bien les résultats établis en étudiant les champs électromoteurs.

4. **1°** Pendant l'intervalle de temps $t_2 - t_1$, la surface du circuit augmente du rectangle $M_1N_1N_2M_2$, le circuit étant orienté dans le sens du courant induit i qui a, dans le conducteur mobile, le sens de $\vec{V} \wedge \vec{B}$. Le vecteur surface $\Delta\vec{S} = \overrightarrow{N_1N_2} \wedge \overrightarrow{N_2M_2}$ est opposé au champ magnétique $\vec{B}$.
La variation du flux $\vec{B} \cdot \Delta\vec{S} = -B \cdot N_1N_2 \cdot N_2M_2$.
La force électromotrice induite est donc :

$$e = -\frac{d\varphi}{dt};$$

$$e = -\left(-B \cdot \frac{N_1M_2}{t_2 - t_1} \cdot N_2M_2\right).$$

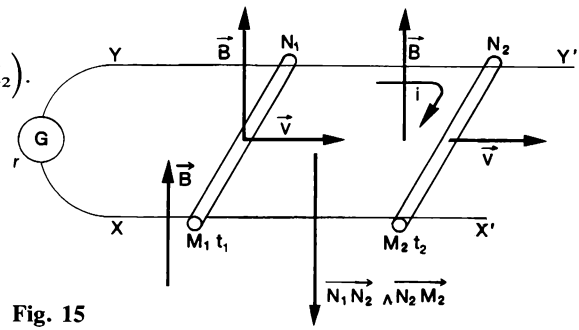


Fig. 15

2° On retrouve l'expression de la force électromotrice induite :

$e = B \cdot V \cdot L$, avec $L = N_2M_2$ longueur du conducteur mobile.

$e = 0{,}03$ V.

L'intensité du courant induit est donc $i = \frac{e}{r}$.

$i = 10^{-4}$ A, orienté de N_2 vers M_2, dans le sens du champ électromoteur $\vec{V} \wedge \vec{B}$.

5. **1°** A la date t_1, le point A est en A_1; à la date t_2, il est en A_2.
La surface balayée par le rayon OA dans l'intervalle de temps $t_2 - t_1$ est le secteur circulaire OA_1A_2 de surface $\Delta S = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{\omega \cdot \Delta t}{2\pi}$.

Le flux coupé est donc

$$\Delta\varphi = \vec{B} \cdot \Delta\vec{S},$$

en prenant comme sens positif le sens du courant induit sur A_1A_2O.
La variation du flux $\Delta\varphi$ est négative.
La force électromotrice induite est positive; elle a bien le sens du courant induit sur A_2O :

$$e = B \cdot \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \omega \cdot \Delta t}{2\pi \cdot \Delta t}$$

$$\Rightarrow e = \frac{1}{2} \cdot B \cdot R^2 \cdot \omega : \quad e = 0{,}125 \text{ V}.$$

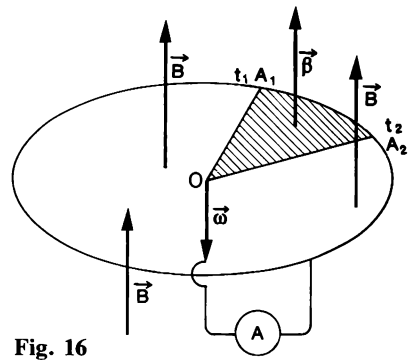


Fig. 16

2° La résistance du circuit étant $r = 1\,000$ ohms, l'intensité du courant induit est $i = \frac{e}{r}$: $i = 0{,}125$ mA.

6. Quand le courant passe de 0 à $I = 10$ A, le courant induit dans la bobine s'oppose à l'accroissement du flux. On oriente donc la bobine de telle sorte que le vecteur $\vec{S}$ soit opposé à $\vec{B}$.
Champ magnétique dans le solénoïde : $B = \mu_0 \cdot n \cdot I$, n = nombre de spires par mètre,

$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{1\,000}{0{,}3} \cdot 10$;
$B = 0{,}042$ T.

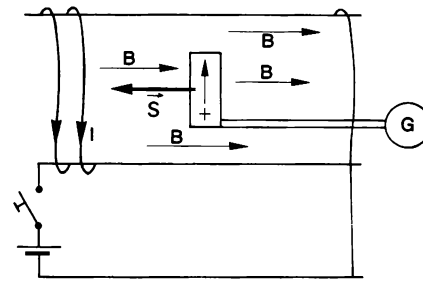


Fig. 17

1° Le flux initial à travers la bobine plate est nul : $B = 0$.
Le flux final est $\varphi = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} \Rightarrow \varphi = -50 \cdot 0{,}042 \cdot 5 \cdot 10^{-4}$

$$\varphi = -1{,}05 \cdot 10^{-3} \text{ Wb.}$$

La variation de flux est $\Delta\varphi = -1{,}05 \cdot 10^{-3}$ Wb.
La force électromotrice induite est $e = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 0{,}105$ V.

2° Quand on coupe, le courant I passe de 10 A à 0, le flux passe de

$$\varphi = -1{,}05 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} \quad \text{à} \quad \varphi = 0.$$

La variation de flux est $\Delta\varphi = +1{,}05 \cdot 10^{-3}$ Wb.
La force électromotrice induite est $e = -0{,}1$ V.
Le courant induit circule dans le sens négatif : il s'oppose, cette fois, à la diminution du flux.

3° La quantité d'électricité induite dans le circuit $q = -\frac{\Delta\varphi}{r}$.

$$q = 1{,}05 \text{ } \mu\text{C.}$$

Le sens du déplacement des charges permet de connaître le sens du champ magnétique si on sait que $\vec{B}$ croît ou décroît.
La connaissance du circuit permet de connaître $\Delta\varphi$.
$N \cdot S$ qui caractérise la bobine plate est connu; on peut donc calculer B et l'orienter en fonction du sens de déplacement des charges et de la croissance ou de la décroissance du flux.

7. La variation du flux du champ magnétique est $\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i$.
Orientons les spires de la bobine comme indiqué sur la **figure 5.**
A l'état initial le flux est positif : $\varphi_i = N \cdot B \cdot S$.
A l'état final le flux est négatif : $\varphi_f = -N \cdot B \cdot S$.

La variation du flux est donc :
$\Delta\varphi = -2 \cdot N \cdot B \cdot S.$

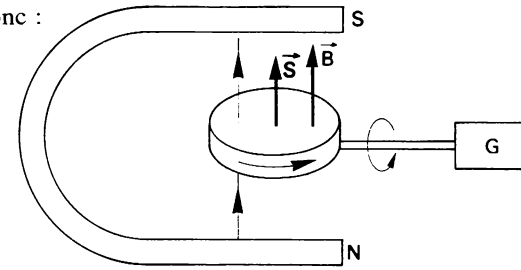


Fig. 18

La charge électrique induite est $q = -\dfrac{\Delta\varphi}{R}$, indépendante du temps

$$e = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad i = \frac{e}{R}, \quad q = i \cdot \Delta t;$$

$$q = \frac{2 \cdot N \cdot B \cdot S}{R}.$$

Charge emmagasinée dans le condensateur : $Q = C \cdot V$, $Q = 0{,}15$ μC.
Les deux expériences donnant la même déviation, les quantités d'électricité sont égales :

$$0{,}15 \cdot 10^{-6} = \frac{2 \cdot N \cdot B \cdot S}{R}$$

donc $$B = \frac{0{,}15 \cdot 10^{-6} \cdot R}{2 \cdot N \cdot S} : \quad B = 2{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ T}.$$

8. Quand l'aimant est dans la bobine le flux est maximal, il est égal au flux sortant du pôle nord de l'aimant puisque le flux est conservatif. Chaque spire de la bobine est traversée par ce flux, donc $\varphi_i = N \cdot \varphi$, $\vec{S}$ orienté dans le sens de $\vec{B}$.
Quand l'aimant est loin de la bobine le flux est nul : $\varphi_f = 0$.
La variation du flux est donc $\Delta\varphi = -N \cdot \varphi$.
La charge électrique induite est :

$$q = \frac{\Delta\varphi}{R},$$

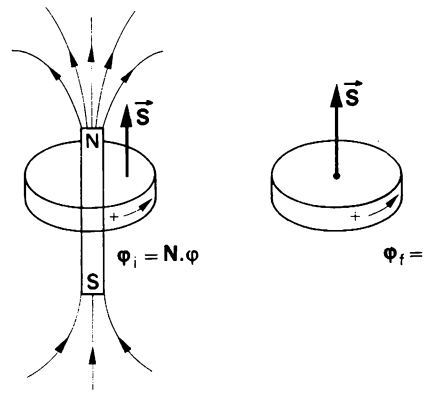


Fig. 19

charge positive circulant en sens inverse du sens positif choisi.
q est indépendant de Δt et ne dépend que de la résistance du circuit.
Pour observer une déviation moitié du spot, il faut doubler la résistance du circuit, c'est-à-dire introduire en série, avec le galvanomètre et la bobine, une résistance $r = 1\,000\ \Omega$, la résistance totale devenant $R' = 2\,000\ \Omega$.
La déviation du spot du galvanomètre est proportionnelle à la charge qui le traverse :
0,1 μF (1 V), $Q = 0{,}1$ μC, soit 10 divisions;
0,25 μF (1 V), $Q = 0{,}25$ μC, soit 25 divisions;
donc $Q = 0{,}20$ μC $\Leftrightarrow$ 20 divisions.
On a donc :

$$0{,}20\ \mu C = \frac{\Delta\varphi}{R}, \quad \frac{50 \cdot \varphi}{1\,000} = 0{,}2 \cdot 10^{-6}, \quad \varphi = 4 \cdot 10^{-6}\ \text{Wb}.$$

9. 1° Champ magnétique dans un solénoïde long : $B = \mu_0 \cdot n \cdot I$,

$$B = 1 \cdot 10^{-2}\ \text{T}.$$

Flux magnétique à travers la bobine plate. Orientons S dans le sens de B. Ceci impose un sens de rotation positif sur la spire (règle du tire-bouchon) :

$$\varphi = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S}$$

$$\varphi_i = 450 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-4}, \quad \varphi_i = 2{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}.$$

Si on fait pivoter la spire de 45°, $\vec{B}$ et $\vec{S}$ font un angle de 45°.
Le flux devient : $\varphi_f = \varphi_i \cdot \cos 45°$, $\varphi_f = 1{,}59 \cdot 10^{-3}$ Wb.

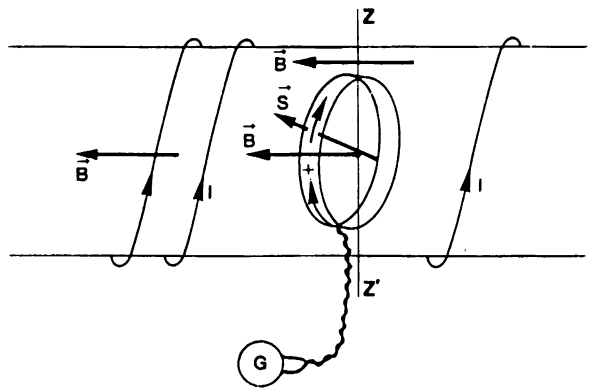


Fig. 20

La variation du flux est :

$$\varphi_f - \varphi_i = -6{,}59 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}.$$

2° Quand le courant est nul, le flux est nul; quand la bobine longue est parcourue par le courant, I le flux à travers la bobine plate est :

$$\varphi = 2{,}25 \cdot 10^{-3} \cos(\vec{B}, \vec{S}).$$

La variation de flux est donc : $\Delta\varphi = -2{,}25 \cdot 10^{-3} \cos(\vec{B}, \vec{S})$, et la quantité d'électricité induite :

$$q = -\frac{\Delta\varphi}{R}, \quad q = +2{,}25 \cos(\vec{B}, \vec{S})\ \mu C.$$

3° Si la bobine plate tourne à la vitesse 10 tours par seconde, l'angle $(B, S) = 20 \cdot \pi \cdot t$, le flux devient une fonction du temps :

$$\varphi = N \cdot B \cdot S \cos(20 \cdot \pi \cdot t).$$

La force électromotrice induite est alors : $e = -\dfrac{d\varphi}{dt}$;

$$e = 20 \cdot \pi \cdot N \cdot B \cdot S \sin(20 \cdot \pi \cdot t);$$

$$e = 0{,}14 \sin(20 \cdot \pi \cdot t) \text{ en volts.}$$

L'intensité du courant induit est : $i = \dfrac{e}{R}$,

$$i = 0{,}14 \cdot 10^{-3} \sin(20 \cdot \pi \cdot t), \quad i \text{ en ampères.}$$

On n'observe pas de déviation du galvanomètre parce que le spot est sollicité alternativement vers la droite et vers la gauche selon le sens de déplacement des charges. Pour mesurer l'intensité du courant, il faut le transformer en un courant unidirectionnel à l'aide d'une diode, par exemple, ce qui fait passer, dans le cadre du galvanomètre, un courant continu.

14 AUTO-INDUCTION

Un circuit électrique parcouru par un courant d'intensité i produit un champ magnétique proportionnel à i dans tout l'espace à son voisinage. Le flux magnétique traversant le circuit est donc proportionnel à l'intensité du courant produisant le champ. On pose $\varphi = L \cdot i$.
L est l'inductance du circuit; elle se mesure en henrys (H).
Les variations du courant i provoquant des variations du flux $L \cdot i$, il apparaît donc une **force électromotrice auto-induite** qui s'oppose aux variations de l'intensité du courant :

$$e = -L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

En courant continu, l'auto-induction intervient pendant un temps très court à l'ouverture et à la fermeture des circuits et n'est importante que dans les circuits ayant une forte induction, les machines électriques par exemple.
En courant alternatif, l'auto-induction intervient à tout instant.

EXERCICES

1. Calculer l'inductance d'un solénoïde de longueur 40 cm de section 10 cm^2 comprenant 1 000 spires régulièrement réparties.
Réponse : champ magnétique dans le solénoïde $B = \mu_0 \cdot n \cdot i$. Flux de $\vec{B}$ à travers les 1 000 spires : $\varphi = 1\,000 \cdot \mu_0 \cdot n \cdot i \cdot S$, donc $\varphi = L \cdot i$, $L = 1\,000 \cdot \mu_0 \cdot n \cdot S$:

$$L = 3{,}14 \text{ mH}.$$

2. Quelles sont les caractéristiques d'un solénoïde dont la self-induction est $L = 1$ H si sa section est $S = 20$ cm^2 et sa longueur $l = 1$ m?
Réponse : $B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot i$, $\varphi = B \cdot S \cdot N$; $L = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot S$;
$N = 19\,947 \approx 20\,000$ spires, $B = 0{,}025 \cdot i$.

3. Une bobine d'inductance $L = 0{,}1$ H est parcourue par un courant qui varie selon la loi $i = 100 \cdot t$ entre $t = 0$ et $t = 0{,}1$ s. i reste constant pour $t \geqslant 0{,}1$ s. Quelle est la force électromotrice auto-induite dans la bobine pendant cet intervalle de temps?
Réponse : $e = -L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 100 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$.

$\Rightarrow$ $e = -10$ V, opposée au passage du courant.

4. Un circuit ayant un coefficient de self-induction $L = 0{,}1$ H est parcouru par un courant d'intensité $i = 5$ A. Le courant est coupé à l'aide d'un rupteur et s'annule en 0,01 s. Quelle est la force électromotrice moyenne auto-induite qui apparaît aux bornes de ce circuit?

Réponse : $\frac{di}{dt} = -500 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$, $e = +50$ V.

Cette force électromotrice tend à prolonger le courant.

5. Un circuit ayant un coefficient de self-induction $L = 0{,}2$ H est parcouru par un courant d'intensité $i = 5 \sin(100 \cdot \pi \cdot t)$.
Quelle est en fonction du temps, la force électromotrice auto-induite?

Réponse : $\frac{di}{dt} = 500 \cdot \pi \cos(100 \cdot \pi \cdot t)$, donc $e = -100 \cdot \pi \cos(100 \cdot \pi \cdot t)$.

PROBLÈMES

1. Un circuit est constitué d'un solénoïde de résistance $r = 50\ \Omega$ muni d'un noyau magnétique, d'un rhéostat R_h et d'une batterie d'accumulateur de force électromotrice $e = 100$ V, de résistance interne négligeable.
Quelle est l'intensité du courant dans le circuit?
On fait passer brusquement la résistance du rhéostat de $100\ \Omega$ à $0\ \Omega$, quel est le coefficient de self-induction du circuit si la pente de la courbe $i(t)$ est de $10 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$ à l'instant où l'intensité du courant est $i = 1{,}5$ A?
Quelle est l'intensité du courant quand le régime permanent est atteint?

2. Une bobine cylindrique est formée de 1 000 spires de diamètre $D = 6$ cm disposées sur un cylindre de carton de longueur $l = 30$ cm.
Quel est le coefficient de self-induction de ce solénoïde?
On introduit dans le solénoïde un noyau de fer doux de façon à augmenter le coefficient de self-induction. La bobine étant parcourue par un courant $I = 10$ A, on fait brusquement décroître cette intensité selon la loi $i = 10 - 50 \cdot t$ jusqu'au moment où le courant est nul. La force électromotrice auto-induite étant $e = 500$ volts, quel est le coefficient de self-induction de la bobine avec son noyau de fer? Par combien est-il multiplié par la présence du noyau?
Que se passe-t-il si, la bobine étant parcourue par un courant $i = 10$ A, on retire le noyau de fer en 0,05 s. Quelle est alors la force électromotrice moyenne auto-induite pendant ce retrait?

3. Un circuit se compose d'un générateur de force électromotrice $e = 12$ volts, de résistance interne négligeable, d'une bobine de résistance r et de self L inconnues. On enregistre, par un dispositif automatique, la courbe $i(t)$ d'établissement du courant dans le circuit. A la date $t = 0$, la tangente à la courbe $i(t)$ a pour pente $4 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$. Au bout d'un certain temps, l'intensité se stabilise à la valeur $i = 3$ A.
Déduire de cet enregistrement les valeurs de L et r.
Indiquer sur un graphe l'allure de la courbe d'établissement du courant.

4. Un circuit comprend un générateur G de force électromotrice $e = 24$ V, de résistance interne $r = 2\ \Omega$, un rhéostat de résistance maximale $R_h = 24\ \Omega$ et

un solénoïde de résistance $R = 4\ \Omega$. Un interrupteur permet de mettre le rhéostat en court-circuit.

1° Quel est le champ magnétique dans le solénoïde quand le courant a sa valeur minimale, le rhéostat étant en circuit, sachant que le solénoïde a une longueur $l = 10$ cm et comporte 800 spires régulièrement réparties?
Quelle est la variation du flux dans le solénoïde quand on met le rhéostat en court-circuit, la surface d'une des spires du solénoïde étant $S = 4\ \text{cm}^2$? Quelle est la force électromotrice auto-induite moyenne, si cette variation d'intensité se fait en 0,1 seconde?

2° On dispose dans ce solénoïde une petite bobine exploratrice formée de 20 spires de surface $S = 2\ \text{cm}^2$. La résistance de cette bobine est 20 Ω; elle est reliée à un galvanomètre balistique de résistance 280 Ω. Quand les deux bobines ont même axe, on mesure la quantité d'électricité qui traverse le galvanomètre lorsque le courant passe de I_{max} à I_{min} lorsque l'on introduit le rhéostat dans le circuit.
De quel angle faut-il faire pivoter la petite bobine pour que l'on mesure la même quantité d'électricité si on débranche le générateur le courant passant alors de I_{max} à $I = 0$?

SOLUTIONS

1. L'intensité du courant dans le circuit est $i = \dfrac{e}{r + R_h}$.

A la date $t = 0$, l'intensité du courant est $i = \dfrac{100}{150} = 0{,}67$ A.

En régime permanent, quand $R_h = 0$, l'intensité du courant devient $i = 2$ A; en fait, à l'instant où $R_h = 0$, i n'est que de 1,5 A. L'intensité croît avec le temps; le taux d'accroissement est $10\ \text{A} \cdot \text{s}^{-1}$, donc la force électromotrice auto-induite est

$$e' = -L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -10 \cdot L, \qquad e - e' = r\, i.$$

La loi d'Ohm s'écrit donc :

$$100 - 10 \cdot L = 50 \cdot 1{,}5$$
$$10 \cdot L = 25, \qquad L = 2{,}5 \text{ H}.$$

2. $B = \mu_0 \dfrac{N}{l}\, i$, champ dans le solénoïde.

Le flux de B à travers le solénoïde est $\varphi = N \cdot B \cdot S$, $\varphi = \mu_0 \dfrac{N^2}{l}\, i \cdot S$.

On pose $\varphi = L \cdot i$, donc $L = \mu_0 \dfrac{N^2}{l}\, S$, $L = 1{,}18 \cdot 10^{-2}$ H;

$$e = -L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \qquad 500 = -L\,(-50), \qquad L = 10 \text{ H}.$$

La présence du noyau de fer a multiplié le coefficient de self-induction par $1{,}18 \cdot 10^{-2} \cdot X = 10$, $X = 840$.
Si on retire le noyau de fer en 0,05 s, le flux dans la bobine est divisé par 840.

On a donc : $e = -\dfrac{d\varphi}{dt}$, $e = \dfrac{L_f \cdot i - L_i \cdot i}{0{,}05}$, $e = 1998$ V.

3. A la date $t = 0$, le courant dans le circuit est encore nul, on a donc :

$$e - L\frac{di}{dt} = 0, \quad 12 - 4L = 0, \quad L = 3 \text{ H}.$$

Quand l'intensité devient constante :

$$L \cdot \frac{di}{dt} = 0, \quad e = r \cdot i, \quad r = 4\ \Omega.$$

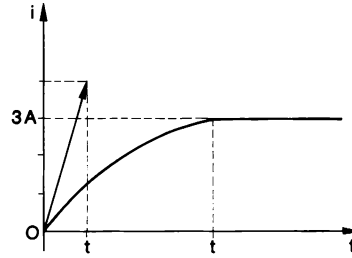


Fig. 1

4. L'intensité maximale du courant est obtenue par $R_h = 0$. La résistance totale du circuit est alors $r + R = 6$ ohms et l'intensité du courant $I_{max} = 4$ A. Le champ magnétique dans le solénoïde est alors : $B_{max} = \mu_0 \cdot n \cdot I_{max}$:

$$B_{max} = 4{,}02 \cdot 10^{-2} \text{ T}.$$

1° Quand le courant passe de sa valeur maximale à sa valeur minimale, le rhéostat est en circuit; l'intensité du courant devient : $I_{min} = 0{,}8$ A.

Le champ magnétique est alors : $B_{min} = \dfrac{0{,}8}{4} B_{max}$: $B_{min} = 8{,}04 \cdot 10^{-3}$ T.

La variation du flux est alors :

$$\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i = N \cdot S\,(B_{max} - B_{min}),$$
$$\Delta\varphi = 1{,}03 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}.$$

On peut aussi utiliser le coefficient de self-induction L : on pose $\varphi = L \cdot I$, $\varphi = N \cdot S \cdot \mu_0 \cdot n \cdot I$, $\varphi = 3{,}22 \cdot 10^{-3} I$.

$$\Delta\varphi = L \cdot \Delta I, \quad \Delta\varphi = 3{,}22 \cdot 10^{-3}(4 - 0{,}8), \quad \Delta\varphi = +1{,}03 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}.$$

La force électromotrice induite pendant la variation du flux est :

$$e = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad e = -0{,}103 \text{ V}$$

qui s'oppose à l'augmentation de I.

2° La variation de flux dans la bobine exploratrice est :

$$\Delta\varphi = N \cdot s \cdot (B_{min} - B_{max}) : \Delta\varphi = -1{,}29 \cdot 10^{-4} \text{ Wb};$$

$q = -\dfrac{\Delta\varphi}{R}$, avec R résistance totale du circuit, $R = 300\ \Omega \Rightarrow q = 0{,}43$ µC.

$$q = 0{,}43 \text{ µC}.$$

Si le courant passe de I_{max} à 0 la variation de flux est :

$$\Delta\varphi' = N \cdot s\,(0 - B_{max}) : \Delta\varphi' = -1{,}61 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}.$$

Si on veut mesurer la même quantité d'électricité, il faut que les axes des bobines fassent un angle θ tel que $|\Delta\varphi'| \cdot |\cos\theta| = |\Delta\varphi|$

$$\cos\theta = \pm 0{,}8 \Rightarrow \theta = 36°45' \text{ ou } \theta = 143°15'.$$

OSCILLATEUR MÉCANIQUE A UNE DIMENSION

15

Un système mécanique est à une dimension — on dit encore *à un degré de liberté* — lorsque son état cinématique est entièrement décrit par la connaissance, en fonction du temps, d'une seule variable de position.

Un système mécanique constitue **un oscillateur** s'il possède **une position d'équilibre stable** et qu'il effectue des **oscillations autour de la position d'équilibre** lorsqu'il en a été écarté : il est donc soumis à une **force de rappel;** on dit que le système effectue des **oscillations libres.**

OSCILLATEUR HARMONIQUE NON AMORTI

Dans ce cas, l'équation en fonction du temps de la variable repère (abscisse ou angle) sera sinusoïdale. On peut alors montrer que **l'énergie mécanique du système est constante;** c'est la raison pour laquelle on dit que le système est non amorti ou **à forces conservatives.**

1. Exemple du pendule élastique

Une masse m, soumise à la force de rappel d'un ressort de raideur k (expérience sur coussin d'air) et dont le centre d'inertie est repéré par son abscisse x comptée à partir de la position d'équilibre, a un mouvement régi par l'équation :

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \qquad \left(\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}\right) \qquad \text{dont la solution est :}$$

$x = x_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

$T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ est la période propre

$f_0 = \dfrac{1}{T_0}$ est la fréquence propre.

ω_0 = pulsation propre
x_m = amplitude
φ = phase à l'origine

Corrélativement l'énergie mécanique reste constante :

$$E = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2 = C^{te} = \frac{1}{2} k \cdot x_m^2 \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right).$$

2. Exemple du pendule de torsion **(fig. 1)**

$\mathcal{J}$ étant le moment d'inertie par rapport à l'axe, $\mathcal{C}$ la constante de rappel du couple de torsion et θ l'angle repère, on aura :

$$\frac{1}{2}\,\mathcal{J}\cdot\ddot{\theta}^2+\frac{1}{2}\,\mathcal{C}\cdot\theta^2=C^{te}=\frac{1}{2}\,\mathcal{C}\cdot\theta^2{}_m$$

$$\Leftrightarrow\ \mathcal{J}\cdot\ddot{\theta}+\mathcal{C}\cdot\theta=0$$

de solution :

$$\theta=\theta_m\cdot\cos(\omega_o\cdot t+\varphi)$$

avec $\omega_0=\sqrt{\dfrac{\mathcal{C}}{\mathcal{J}}}$.

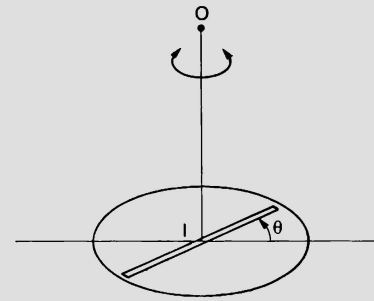


Fig. 1

OSCILLATEUR HARMONIQUE AMORTI

L'expérience montre que le mouvement d'un oscillateur n'est pas rigoureusement sinusoïdal, l'amplitude diminuant au cours du temps : il y a *amortissement* (pour un amortissement important le caractère oscillatoire peut même disparaître). C'est la preuve qu'il existe une **force d'amortissement dissipatrice d'énergie ;** l'énergie mécanique du système diminue, la diminution correspondant au travail de la force d'amortissement*.

Étude du mouvement

• *si l'amortissement est faible,* le système effectuera des oscillations quasi-sinusoïdales de période $T\simeq T_0$ (T s'appelle pseudo-période) dont l'amplitude diminuera exponentiellement **(fig. 2) ;**

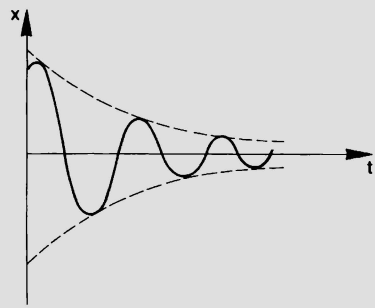


Fig. 2

* Dans le cas d'une force de frottement proportionnelle à la vitesse, l'équation s'écrira (dans le cas d'un pendule élastique, par exemple) :

$$m\cdot\ddot{x}+f\cdot\dot{x}+k\cdot x=0$$

le caractère linéaire de la réponse sera conservé et l'oscillateur restera harmonique.
La résolution mathématique de cette équation n'est pas au programme de Terminales.

• *si l'amortissement est grand,* il n'y a plus d'oscillations, l'élongation décroissant exponentiellement **(fig. 3).**

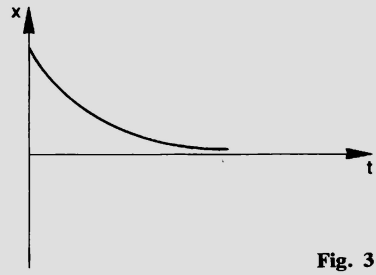


Fig. 3

EXERCICES

1. Un ressort de raideur $k = 10\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ est attaché à une masse $m = 0{,}2$ kg se déplaçant en translation rectiligne horizontale sans frottement. Quelle est la période d'oscillations de la masse?

Réponses : $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ et $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}89$ s.

2. Un point matériel de masse $m = 10$ g est soumis à une force de rappel telle qu'il se trouve animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'amplitude 8 cm et de période 2 s, l'élongation étant maximale à l'instant $t = 0$.

1° Donner l'équation du mouvement.

2° Calculer la position, l'accélération et la force de rappel à l'instant $t = 0{,}25$ s.

Réponse : **1°** $x = 8 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(\pi \cdot t)$.

2° $x = 8 \cdot 10^{-2} \cdot \cos \dfrac{\pi}{4} = 5{,}66 \cdot 10^{-2}$ m.

$$a = -\omega_0^2 \cdot x = -0{,}56\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}; \quad f = -m \cdot \omega_0^2 \cdot x = -5{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{N}.$$

3. Dans le cas d'une masse ponctuelle m soumise à la force de rappel d'un ressort de raideur k, calculer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique, en fonction du temps.

Réponse : avec $x = x_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$,

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot x_m^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x_m^2 \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t + \varphi); \text{ avec } m \cdot \omega_0^2 = k,$$

on obtient facilement $E = \dfrac{1}{2} k \cdot x_m^2 = \dfrac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 \cdot x_m^2$.

4. Sur le banc à coussin d'air rectiligne et horizontal, un oscillateur harmonique de translation est constitué par un solide de centre d'inertie G fixé à l'extrémité d'un ressort sans masse. L'autre extrémité du ressort est lié au banc. On choisit l'origine des abscisses dans la position d'équilibre du point G, l'axe Ox étant orienté dans le sens de l'allongement du ressort ($m = 100$ g; $k = 20\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$).
A la date $t = 0$, on communique au solide assujetti à se déplacer sur l'gxe Ox une vitesse $v_0 = 0{,}42\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans le sens du raccourcissement du ressort. Donner l'expression en fonction du temps de l'abscisse x du point G.

Réponse : $x = 3\cdot 10^{-2} \cos\left(14{,}1t + \frac{\pi}{2}\right)$ car

$$v = -x_0 \cdot \omega_0 \cdot \sin\left(14{,}1t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad x_0 = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

5. Une masse ponctuelle m est soumise aux forces de rappel de deux ressorts de raideurs respectives k_1 et k_2. Calculer la raideur d'un ressort unique équivalent dans les trois cas de figures ci-dessous :

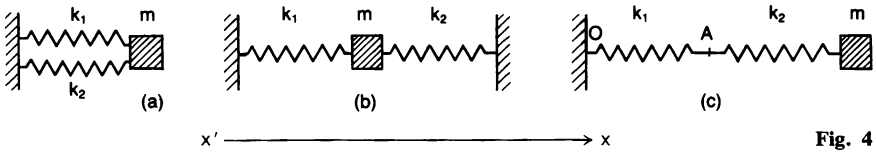


Fig. 4

Réponse : a) La force de rappel unique vaut $-(k_1 + k_2)x \Rightarrow K = k_1 + k_2$.
b) On a encore $K = k_1 + k_2$ (quand un ressort est comprimé l'autre est étiré).
c) En appelant x_1 l'allongement au premier ressort (abscisse de A) et x_2 l'allongement du deuxième, l'abscisse de m est $x = x_1 + x_2$; l'équilibre du point A (de masse nulle) exige $k_1 \cdot x_1 = k_2 \cdot x_2$ soit :

$$\frac{x_1}{1/k_1} = \frac{x_2}{1/k_2} = \frac{x_1 + x_2}{1/k_1 + 1/k_2}.$$

L'ensemble est équivalent à un ressort unique de raideur K avec $\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

PROBLÈMES

1. Un ressort attaché à un point fixe soutient une masse m sous le poids de laquelle il s'allonge de 10 cm. Calculer la période des oscillations du système. On prendra $g = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

2. Un solide S se déplaçant sur une table à coussins d'air est fixé à l'extrémité d'un ressort R de constante de raideur $k = 20\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, l'autre extrémité du

ressort est fixe, on écarte le solide S d'une quantité x par rapport à sa position d'équilibre.

1° Quelle est l'expression de l'énergie potentielle E_p du solide S en fonction de x?

2° Représenter graphiquement la fonction E_p en fonction de x.

3° Si l'énergie totale du système est $E = 1{,}6 \cdot 10^{-2}$ J, quelle est l'amplitude maximale des oscillations? Donner une solution graphique.

4° Si la masse de S est $m = 0{,}2$ kg, quelle est sa vitesse au passage par la position d'équilibre?

3. Un fil de torsion est fixé au milieu I d'une barre CD (CD = 1 m), l'ensemble étant suspendu verticalement par l'autre extrémité O du fil. On écarte la barre d'un angle $\theta_m = 50°$ de la position d'équilibre et on la lâche à la date $t = 0$, sans vitesse initiale : le système oscille avec la période $T_0 = 1$ s.

1° Donner l'équation du mouvement de la barre et calculer :

a) sa vitesse angulaire maximale;

b) son accélération angulaire pour le point d'élongation $\theta = -30°$.

2° On surcharge la barre symétriquement par deux masselottes identiques de masse $m = 75$ g placées à la distance $d = 20$ cm du centre d'inertie I : la nouvelle période d'oscillations est $T = 2$ s.
Calculer le moment d'inertie de la barre $\mathcal{J}_0$ et la constante de torsion C du fil.

4. Un solide (S) de centre d'inertie G, de masse $m = 160$ g est accroché à l'extrémité d'un ressort vertical à spires non jointives, parfaitement élastique, dont l'extrémité supérieure est liée à un support fixe. La masse du ressort peut être considérée comme négligeable devant la masse du solide (S).
A l'équilibre, l'allongement du ressort est 3,2 cm et G coïncide avec le point O d'un axe vertical $x'Ox$ orienté positivement vers le bas.

1° Calculer le coefficient de raideur du ressort.

2° On tire (S) verticalement vers le bas de 2,5 cm et on lâche le système sans vitesse initiale.

a) Déterminer la nature du mouvement de G.

b) En prenant pour origine des dates l'instant du lâcher de (S), établir l'équation horaire du mouvement de G.

5. Deux solides indéformables S_1 et S_2 de masses respectives

$$M_1 = 0{,}1 \text{ kg et } M_2 = 0{,}4 \text{ kg}$$

peuvent glisser sans frottement sur une tige horizontale T. Le solide S_1 est lié à l'extrémité d'un ressort R à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur $k = 30 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. L'autre extrémité du ressort est fixé en A à la tige T. L'ensemble ressort-solide (S_1) étant à l'équilibre, ressort non déformé, on lance (S_2) placé à l'autre extrémité de la tige vers (S_1). Au moment du choc, il y a accrochage des deux solides, formant alors un ensemble solidaire (S) de centre d'inertie G.

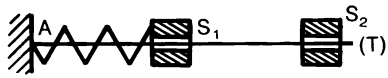


Fig. 5

1° Avant le choc la vitesse du centre d'inertie de (S_2) est $v_2 = 0{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, déterminer la vitesse $\vec{v}_0$ du centre d'inertie G de (S) juste après le choc.

2° Déterminer la nature du mouvement du centre d'inertie de (S) après le choc. En déduire l'équation horaire du mouvement en choisissant comme origine des dates l'instant du choc entre (S_2) et (S_1).

6. Un pendule de torsion est constitué d'un disque de cuivre horizontal fixé à un fil de suspension de constante de torsion C dont la direction verticale passe par le centre d'inertie G du disque. Le disque est un solide homogène de moment d'inertie $\mathcal{J} = 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ par rapport à l'axe de rotation du système.
La période des oscillations libres est $T_0 = 0{,}5$ s.

1° Établir l'équation du mouvement du disque oscillant librement autour de sa position d'équilibre, et en déduire C.

2° Le disque est initialement écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$ rad, puis lancé vers sa position d'équilibre à l'instant $t = 0$ avec une vitesse augulaire α'_0. Le disque passe pour la première fois par sa position d'équilibre à l'instant $t = 6{,}25 \cdot 10^{-2}$ s.
Écrire l'équation du mouvement. En déduire α'_0.

3° Une partie du disque est placée dans l'entrefer d'un aimant en U dont les branches sont horizontales. Le vecteur champ magnétique est perpendiculaire au plan du disque (voir **figure 6**). On constate un amortissement rapide du mouvement.
Expliquer qualitativement le phénomène observé.

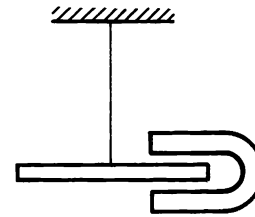


Fig. 6

7. On considère un ressort de masse négligeable de longueur « à vide » l_0 dont on fixe une extrémité O. A l'autre extrémité, on suspend une masse ponctuelle m assimilable à son centre d'inertie I. On prendra $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Pour différentes valeurs de m on note la longueur du ressort :

m (g)	0	50	100	150
l (cm)	6	8	10	12

1° Écrire l'équation d'équilibre de la masse m et calculer la raideur du ressort.

2° Sous l'action d'une force extérieure $\vec{F}$ orientée dans le sens de la pesanteur, la longueur devient $l' = l + x_0$.
a) Écrire la nouvelle relation d'équilibre et en déduire la norme de $\vec{F}$.
Application numérique : $x_0 = 4$ cm.
b) Calculer le travail de cette force consécutif à l'accroissement de longueur x_0.

3° Le ressort étant initialement soumis à l'action du poids de m et à la

force $\vec{F}$ on supprime cette dernière à la date $t = 0$. Étudier le mouvement de la masse m.
Application numérique : $m = 200$ g

4° On place l'ensemble sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, la masse étant mobile sans frottement. $\vec{OI}$ est dirigé suivant la ligne de plus grande pente. A l'équilibre $OI = 10$ cm pour $m = 200$ g. Calculer α.

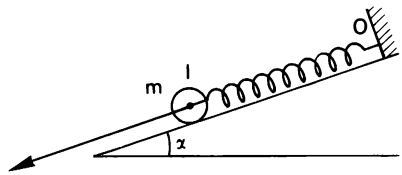


Fig. 7

5° On tire alors sur le ressort et, lorsqu'il a subi un allongement $a = 4$ cm, on le lâche à la date $t = 0$. Donner l'équation du mouvement de I et préciser les caractéristiques de ce mouvement.

SOLUTIONS

1. Soit l_0 la longueur à vide du ressort : sous l'action du poids mg il prend une longueur $l = l_0 + \Delta l$ ($\Delta l = 10$ cm) et on aura l'équilibre statique : $m \cdot g = k(l - l_0)$. Comptant l'abscisse de m à partir de la longueur l l'équation du mouvement s'écrira :

$$m \cdot x'' = -k(l - l_0 + x) + m \cdot g$$

qui se ramène à $m \cdot x'' = -k \cdot x$ et la pulsation ω_0 vérifie $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

On obtient, sachant que $m \cdot g = k \cdot \Delta l$: $\omega_0^2 = \dfrac{m \cdot g}{m \cdot \Delta l} = \dfrac{g}{\Delta l}$.

Numériquement, $\omega_0^2 = 100 \Rightarrow \omega_0 = 10$ rad·s^{-1} et $T_0 = 0{,}63$ s.

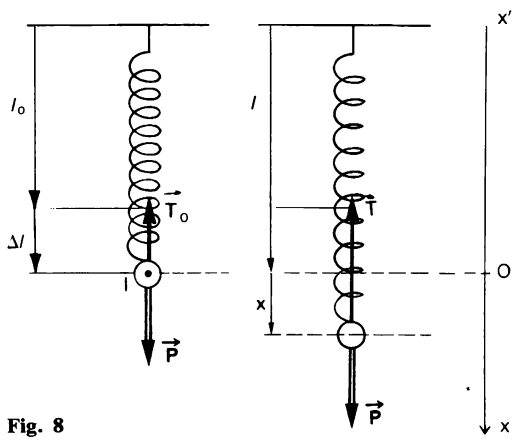


Fig. 8

2. 1° $E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2 = 10x^2$.

2° Cf. figure ci-dessous : la courbe est une parabole.

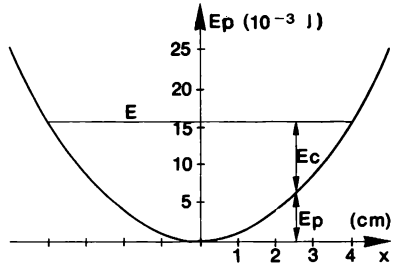


Fig. 9

3° $E = E_c + E_p = \frac{1}{2} k \cdot x_m^2$.

Application numérique : $x_m = 4 \cdot 10^{-2}$ m (on peut trouver la solution sur la courbe précédente).

4° Au passage à la position d'équilibre, l'énergie potentielle est nulle et l'énergie cinétique maximale. On aura donc :

$$E_c = 1{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ J} = \frac{1}{2} m \cdot v_m^2 \quad \text{et} \quad v_m = 0{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. $\mathcal{J}_0 \theta'' + \mathcal{C}\theta = 0 \Rightarrow \theta = \theta_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ avec $\omega_0^2 = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{J}_0}$.

1° Ici $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi$ rad·s^{-1} et $\theta_m = 50° \simeq 0{,}87$ rad, donc $\theta = 0{,}87 \cos(2\pi \cdot t)$, $\theta' = -5{,}47 \sin(2\pi \cdot t)$ et $\theta'' = -34{,}4 \cos(2\pi \cdot t) = -39{,}5\theta$; d'où :

a) $\theta'_m = 5{,}47$ rad·s^{-1};

b) $\theta'' = +39{,}5 \times \frac{\pi}{6} = 20{,}7$ rad·s^{-2}.

2° Le moment d'inertie devient $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + 2m \cdot d^2$ et la pulsation vérifie :

$$\omega^2 = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{J}} \Rightarrow \frac{T^2}{T_0^2} = \frac{\mathcal{J}_0 + 2m \cdot d^2}{\mathcal{J}_0} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathcal{J}_0 + 2m \cdot d^2}{\mathcal{J}_0} = 4 \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_0 = 2 \frac{m \cdot d^2}{3}.$$

Numériquement : $\mathcal{J}_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ m^2·kg; alors $\mathcal{C} = \mathcal{J}_0 \cdot \omega_0^2 \simeq 8 \cdot 10^{-2}$ m·N·rad^{-1}.

4. 1° A l'équilibre : $\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$, d'où $F = k \cdot \Delta l_0 = m \cdot g$

et $$k = \frac{m \cdot g}{\Delta l_0} = 49 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

2° *a*) A un instant t quelconque, l'allongement du ressort est $\Delta l = \Delta l_0 + x$:

l_0 longueur à vide du ressort
$\Delta l_0 = 3{,}2$ cm (allongement du ressort à l'équilibre).

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit : $m \cdot \vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$.

Il vient : $$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot \Delta l + m \cdot g$$
$$= -k(\Delta l_0 + x) + m \cdot g$$
$$= -k \cdot x.$$

L'équation de cet oscillateur est $m \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0$

dont la solution s'écrit $x = x_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$ avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 17{,}5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Le mouvement est rectiligne sinusoïdal de pulsation 17,5 rad·s^{-1}.

b) A l'instant $t = 0$, le solide (S) est situé à l'abscisse $x_0 = +2{,}5 \cdot 10^{-2}$ m et sa vitesse est nulle :

$v = -x_m \cdot \omega_0 \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi) = 0$ pour $t = 0$.

On en déduit : $\sin \varphi = 0$, d'où $\varphi = 0$ ou π

mais comme, à l'instant $t = 0$, $x = x_m \cdot \cos \varphi = x_0 > 0$

seule la solution, $\varphi = 0$ peut convenir.

L'équation horaire du mouvement est $x = 2{,}5 \cdot 10^{-2} \cos 17{,}5 \cdot t$.

5. **1°** La loi de conservation de la quantité de mouvement au cours du choc avec accrochage entre (S_1) et (S_2) s'écrit :

$$M_2 \cdot \vec{v}_2 = (M_1 + M_2) \cdot \vec{v}_0.$$

Les deux vecteurs-vitesse étant de même sens, il vient

$$v_0 = \frac{M_2 \cdot v_2}{M_1 + M_2} = 0{,}32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Le sens de v_0 est le même que celui de $\vec{v}_2$, soit de droite à gauche.

2° On choisit un axe $x'Ox$ confondu avec la tige T, orienté vers la droite, et dont l'origine O coïncide avec la position d'équilibre de (S_1).
La relation fondamentale de la dynamique $\Sigma \vec{f} = m \cdot \vec{a}$ donne :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x$$

car seule la force de rappel du ressort est parallèle à l'axe $x'Ox$.

Le mouvement est celui d'un oscillateur harmonique non amorti, donc rectiligne sinusoïdal dont l'équation horaire est $x = x_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$

avec $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M_1 + M_2}}$$
$$\omega_0 = 7{,}75 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

A l'instant $t = 0$, $x = 0 = x_m \cdot \cos \varphi$: d'où $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

La vitesse de (S) est donnée par $v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 \cdot x_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)$

à l'instant $t = 0$: $v = -v_0 = -\omega_0 \cdot x_m \cdot \sin \varphi$ d'où $\varphi = +\frac{\pi}{2}$

(sens de la vitesse à $t = 0$ de droite à gauche).

On en déduit aussi $x_m = \frac{v_0}{\omega_0} = 4{,}1$ cm.

Finalement l'équation horaire est $x = 4{,}1 \cdot 10^{-2} \cos\left(7{,}75t + \frac{\pi}{2}\right)$

ou $x = -4{,}1 \cdot 10^{-2} \sin 7{,}75t.$

6. **1°** Pour une torsion d'angle α, l'énergie potentielle du système est $E_p = \frac{1}{2} \mathcal{C} \cdot \alpha^2$. Au même instant, la vitesse angulaire du système étant α'^2, l'énergie cinétique du système s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \alpha'^2.$$

Ce système peut être considéré comme un oscillateur harmonique dont l'énergie mécanique se conserve :

$$E_c + E_p = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{J} \cdot \alpha'^2 + \frac{1}{2} \mathcal{C} \cdot \alpha^2 = \text{constante}.$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, il vient :

$$\mathcal{J} \cdot \alpha'' \cdot \alpha' + \mathcal{C} \cdot \alpha \cdot \alpha' = 0$$

d'où $$\mathcal{J} \cdot \alpha'' + \mathcal{C} \cdot \alpha = 0.$$

Une solution de cette équation différentielle est $\alpha = \alpha_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{J}}}$ et $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{C}}}$.

On en déduit : $\mathcal{C} = \frac{4\pi^2 \cdot \mathcal{J}}{T_0^2} = 0{,}16 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$.

2° On a $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 12{,}56 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 4\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

L'équation s'écrit : $\alpha = \alpha_m \cdot \cos(4\pi \cdot t + \varphi)$.

A l'instant $t_1 = 6{,}25 \cdot 10^{-2}$ s, on a : $0 = \alpha_m \cdot \cos(4\pi \cdot t_1 + \varphi)$

$$0 = \alpha_m \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right).$$

La seule solution qui convienne pour cette équation est $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (voir remarque plus loin).

A l'instant $t = 0$: $\frac{\pi}{6} = \alpha_m \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, d'où $\alpha_m = 0{,}74 \text{ rad} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \text{ rad}$.

L'équation horaire du mouvement est : $\alpha = 0{,}74 \cos\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$.

La vitesse angulaire est : $\alpha' = -0{,}74.4\pi \sin\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$.

A l'instant $t = 0$, on en déduit : $\alpha'_0 = -9{,}29 \sin\frac{\pi}{4} = -6{,}57 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Remarque : le signe moins de α'_0 indique que cette vitesse à l'instant $t = 0$ est de sens opposé à l'orientation de l'angle repère α_0, ce qui est conforme à l'énoncé. Il en aurait été autrement si on avait retenu la solution $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ rad.

3° Le disque de cuivre se déplace dans un champ magnétique, il y a apparition de courants induits (courant de Foucault) qui d'après la loi de Lenz s'opposent au déplacement en créant des forces magnétiques. Il est donc normal d'observer un amortissement rapide des oscillations.

7. 1° La masse est en équilibre sous l'action de son poids $m \cdot \vec{g}$ et de la tension $\vec{T}_0$ du ressort : $\vec{T}_0 + m \cdot \vec{g} = \vec{O}$ avec $T_0 = k(l - l_0) \Rightarrow m \cdot g = k$ et $(l - l_0)$. On vérifie bien sur le tableau que les allongements sont proportionnels aux masses et on obtient :

$$k = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}{2 \cdot 10^{-2}} = 24{,}5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

2° *a*) Cette fois, on aura $\vec{T} + \vec{F} + m \cdot \vec{g} = \vec{O}$, donc $T = m \cdot g + F$ avec

$$T = k(l - l_0 + x_0);$$

tenant compte de la relation $m \cdot g = k(l - l_0)$, on obtient

$$F = k \cdot x_0$$

soit numériquement $F = 0{,}98$ N.

b) Comptons les abscisses sur la verticale descendante à partir de la position primitive I (en absence de $\vec{F}$ mais compte tenu de la pesanteur) : pour un allongement supplémentaire x, la *force actuelle* vaut $f = k \cdot x$ et son travail élémentaire :

$$\delta W = f \cdot \delta x = k \cdot x \cdot \delta x;$$

on obtient : $W = \int_0^{x_0} k \cdot x \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2} k \cdot x_0^2$ et, numériquement, $W = 1{,}96 \cdot 10^{-2}$ J.

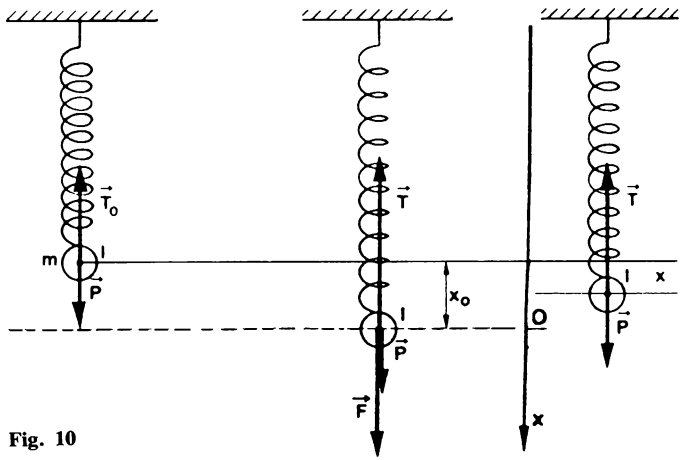


Fig. 10

Remarque : Se méfier de la solution qui consisterait à écrire, en supposant la force constante : $W = F \cdot x_0 = k \cdot x_0^2$. On doit supposer que l'on tire de manière infiniment lente en sorte qu'il y a équilibre à chaque instant entre la force F — qu'il faut donc ajuster — et la force supplémentaire du ressort $k \cdot x$; si on exerçait brutalement une force constante F, la masse possèderait une énergie cinétique quand elle atteindrait l'allongement l' : elle dépasserait cette position et oscillerait ensuite (c'est bien ce qui se passe d'ailleurs quand on accroche la masse et qu'on lâche immédiatement l'ensemble).

3° Supprimant $\vec{F}$, la position d'équilibre sera à nouveau celle correspondant à l'allongement l; en appelant x l'abscisse comptée à partir de cette position suivant la verticale descendante, on aura : $m \cdot x'' = m \cdot g + k(l - l_0 - x) = -k \cdot x$ dont la solution est $x = x_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$ avec $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

A l'instant initial $x = x_0 > 0$ et $x'_0 = 0$ avec $x' = -\omega_0 \cdot x_m \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)$, on obtient $\sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ ou π (modulo 2π) et $x_0 = x_m \cdot \cos \varphi$.
On doit donc prendre $\varphi = 0$, et alors $x = x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$.
Numériquement : $x_0 = 4 \cdot 10^{-2}$ cm et $\omega_0 \simeq 11{,}1$ rad $\cdot$ s^{-1}.

4° Le système est en équilibre sous l'action du poids $m \cdot \vec{g}$, de la tension $\vec{T}_0$ du ressort et de la réaction du plan $\vec{R}$, normale au plan :

$$m \cdot \vec{g} + \vec{T}_0 + \vec{R} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad T = k(l - l_0).$$

En projetant sur l'axe Ox, on obtient :

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha = T_0 = k(l - l_0) \Rightarrow \sin \alpha = \frac{k(l - l_0)}{m \cdot g} = 0{,}5 \quad \text{et} \quad \alpha = 30°.$$

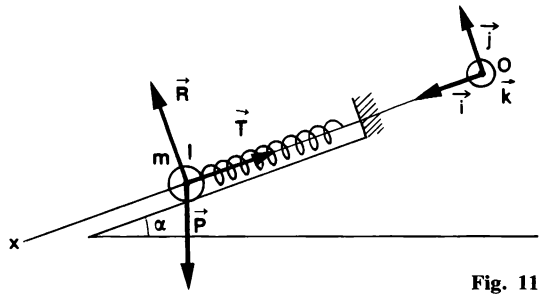


Fig. 11

5° Appelons x la position de I comptée à partir de la position d'équilibre précédente. En projetant la relation fondamentale de la dynamique sur l'axe Ox, on obtient :

$$m \cdot x'' = m \cdot g \cdot \sin \alpha - k(l - l_0 + x)$$

qui se ramène — compte tenu de la relation d'équilibre du **4°** — à la relation : $m \cdot x'' = -k \cdot x$.
Comme précédemment (**3°**) et compte tenu des conditions initiales on trouvera :

$$x = a \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad \text{avec} \quad a = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

On voit bien que **le poids** (en grandeur et en direction) **n'intervient pas dans la nature du mouvement;** il n'intervient que pour fixer la position d'équilibre.

OSCILLATIONS LIBRES D'UN CIRCUIT ÉLECTRIQUE

16

CAS D'UN CIRCUIT (LC)

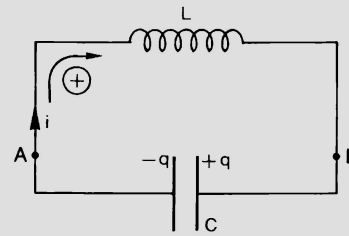


Fig. 1

1. Mise en équation

Avec les conventions de la figure (1) :

$$u_{AB} = -\frac{q}{C}$$

et $$u_{AB} = -e = L\frac{di}{dt}; \quad \text{avec} \quad i = \frac{dq}{dt};$$

on obtient : $$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0.$$

2. Solution

On voit que le circuit constitue un oscillateur harmonique non amorti ; la solution est :

$$q = q_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}.$$

- *Intensité :* $$i = -q_m \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$
- *Tension :* $$u_{AB} = -\frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

L'intensité est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension.

- *Énergie :* pour la capacité : $E_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$

pour la self : $$E_S = \frac{1}{2}L \cdot i^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{dq}{dt}\right)^2.$$

L'énergie électrique $E_C + E_S$ est constante, valant $\frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C} = \frac{1}{2}L \cdot i_m^2$.

CAS D'UN CIRCUIT (R, L, C) SÉRIE*

Le circuit est un oscillateur harmonique amorti.
Si R est petit : les oscillations sont pseudopériodiques **(fig. 3 *a*)**.

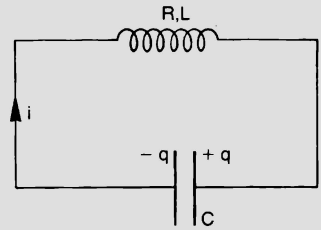


Fig. 2

Si R est grand : il n'y a plus d'oscillations ; on dit que la solution est *apériodique* **(fig. 3 *b*)**.

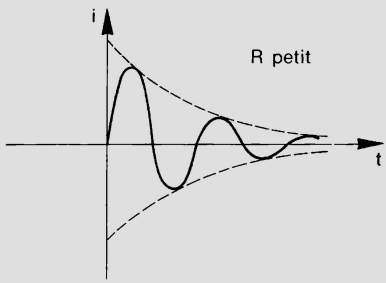


Fig. 3 *a*

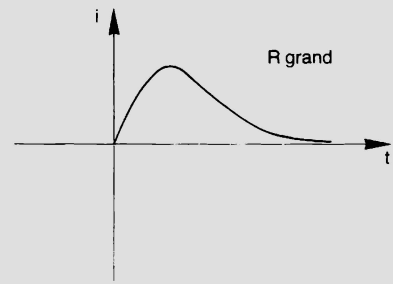


Fig. 3 *b*

EXERCICES

1. Quelle est la fréquence d'un circuit oscillant LC dont le condensateur a une capacité de 1 μF et la bobine une inductance de 40 mH?
   Réponse : 795 Hz.

2. Soit I_m l'intensité maximale qui parcourt un circuit oscillant LC. Calculer en fonction de I_m l'intensité qui parcourt le circuit quand l'énergie est également répartie entre le condensateur et la bobine de self.
   Réponse : $i = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$.

(*) L'équation régissant le phénomène s'écrirait : $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}q = 0$. En fait, si en mécanique, on s'intéresse à l'équation décrivant la variation d'une variable de position plutôt que la vitesse, en électricité on s'intéresse plus à l'intensité qu'à la charge; l'équation, pour l'intensité, serait :

$$L\frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C}\int i \cdot dt = 0.$$

3. Un condensateur de capacité $C = 10^{-6}$ F est chargé sous une tension de 50 V, puis il est branché aux bornes d'une bobine d'inductance $L = 0{,}1$ H et de résistance négligeable. Quelle est la charge maximale du condensateur? Quelle est l'énergie de l'oscillateur? Quelle est la période propre de l'oscillateur?

Réponses : $q_m = 5 \cdot 10^{-5}$ C; $E_C = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ J; $T_0 = 2$ ms.

PROBLÈMES

1. Calculer en fonction du temps l'énergie de self et l'énergie de capacité d'un circuit oscillant LC; calculer son énergie électrique totale et montrer qu'elle est constante.

2. Un oscillateur électrique peut être modélisé par une capacité C et une inductance pure L. La tension commune aux bornes de la capacité et de la self s'écrit $u = \dfrac{q}{C} = -L\dfrac{di}{dt}$.

Dans le but de connaître la variation de l'intensité en fonction du temps on a en fait placé dans le circuit une résistance r, l'énergie dissipée dans cette résistance étant cependant considérée comme négligeable devant l'énergie du circuit. La tension $(r \cdot i)$ aux bornes de la résistance, mesurée à l'oscilloscope, permet de connaître i. On observe la courbe ci-dessous, avec un balayage horizontal de 25 $\mu s \cdot cm^{-1}$ et une sensibilité verticale de 4 $mA \cdot cm^{-1}$.

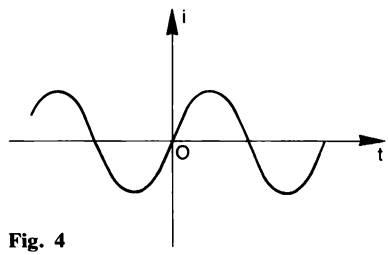


Fig. 4

1° Déterminer la fréquence propre des oscillations du circuit et calculer la capacité du condensateur sachant que l'inductance vaut 25,3 mH.

2° Calculer à l'instant $t = \dfrac{T_0}{4}$,

— l'énergie emmagasinée par le condensateur,
— l'énergie emmagasinée dans la self,
— l'énergie totale du circuit.

3° Même question à l'instant $t = \dfrac{T_0}{8}$.

3. 1° Un condensateur de capacité C est chargé sous une tension continue U. Exprimer la charge q_0 de ce condensateur.
(*Application numérique* : $C = 6 \cdot 10^{-6}$ F, $U = 20$ V).
Les armatures de ce condensateur sont reliées aux extrémités d'une bobine d'inductance L et de résistance négligeable ($L = 5 \cdot 10^{-3}$ H). Donner l'expression de la charge q du condensateur à la date t ainsi que l'expression de l'intensité i en fonction du temps t.
Calculer, en fonction du temps, l'énergie emmagasinée dans le condensateur et celle emmagasinée dans la bobine. Calculer numériquement l'énergie totale du système.

2° Sur un banc à coussin d'air rectiligne horizontal, un oscillateur harmonique de translation est constitué par un solide de centre d'inertie G fixé à l'extrémité d'un ressort de masse négligeable. L'autre extrémité du ressort est fixé.
A la date $t = 0$, le solide assujetti à se déplacer sur une droite Ox est abandonné avec une vitesse nulle dans la position où l'abscisse de G est $x_0 = 3$ cm, les abscisses étant comptées par rapport à la position d'équilibre O.
On donne : masse du solide $m = 50$ g et raideur du ressort $k = 10$ N·m^{-1}.
Établir l'équation différentielle du mouvement. Donner l'expression, en fonction du temps, de l'écart x par rapport à la position d'équilibre.
Calculer l'énergie mécanique du système.

4. 1° Un condensateur de capacité $C = 12{,}5$ μF est chargé par un générateur de f.e.m. 12 V, l'interrupteur K_1 est alors fermé, l'interrupteur K_2 est ouvert. Calculer la charge maximale prise par le condensateur.

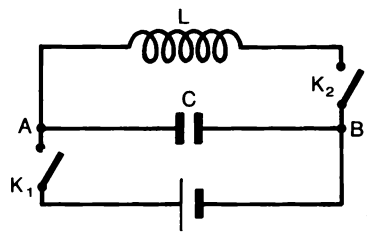


Fig. 5

2° Ce condensateur peut ensuite se décharger dans une bobine d'inductance $L = 0{,}8$ H, supposée d'abord de résistance nulle. Pour cela, on ouvre K_1 et, à la date $t = 0$, on ferme K_2.

a) A l'instant t la tension aux bornes du condensateur vaut

$$u_C = u_{AB}.$$

Établir l'expression de u_C en fonction du temps. Calculer la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0 du circuit LC.

b) On visualise u_C sur l'écran d'un oscillographe dont le balayage horizontal du spot correspond à $5 \cdot 10^{-3}$ s par cm et dont la sensibilité verticale est 6 V par cm. Représenter la courbe $u_C = f(t)$ que l'on observera sur l'écran de l'oscillographe.

c) La bobine a, en réalité, une résistance R. Dessiner les allures de courbes que l'on pourra observer sur l'écran.

5. Comparaison entre oscillations électriques et mécaniques

La figure ci-dessous représente la comparaison :

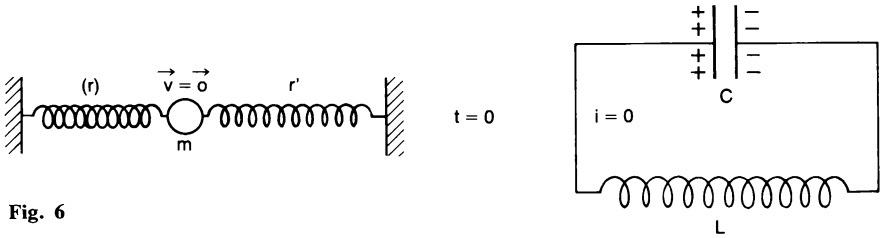


Fig. 6

La masse m a une vitesse nulle, le ressort (r) est comprimé au maximum, le ressort (r') étant étiré au maximum; corrélativement le condensateur possède la charge maximale $+q$ sur une face et $-q$ sur l'autre face, le courant étant nul.

Continuer la comparaison en dessinant autant de doubles schémas qu'il vous semblera nécessaire pour couvrir une période entière. Indiquer à côté de chaque schéma sous quelle forme se trouve l'énergie et sa localisation.

SOLUTIONS

1. On a : $q = q_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$, donc $i = \dfrac{dq}{dt} = -\omega_0 \cdot q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$, $\omega_0^2 = \dfrac{1}{L \cdot C}$.

L'énergie du condensateur vaut : $E_C = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C} = \dfrac{1}{2}\dfrac{q_m^2}{C}\cos^2(\omega_0 \cdot t + \varphi)$.

L'énergie de la self vaut : $\dfrac{1}{2} L \cdot i^2 = \dfrac{1}{2} L \cdot \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi)$ qui s'écrit encore, compte tenu de la valeur de ω_0^2 : $\dfrac{1}{2}\dfrac{q_m^2}{C} \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi)$.

L'énergie totale vaut donc : $\dfrac{1}{2}\dfrac{q_m^2}{C}$.

On peut introduire l'intensité maximale par $\omega_0^2 \cdot q_m^2 = I_m^2$ et l'on trouve alors que l'énergie totale vaut aussi $\dfrac{1}{2} L \cdot I_m^2$.

2. **1°** Sur la figure, on découvre que la période est de 2 cm

$\Leftrightarrow T_0 = 2 \times 25 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-5}$ s; $N_0 = \dfrac{1}{T_0} = 2 \cdot 10^4$ Hz et $\omega_0 = 4\pi \cdot 10^4$ rad·s^{-1};

alors $\omega_0^2 = 16\pi^2 \cdot 10^8 = \dfrac{1}{L \cdot C} \Rightarrow C = 2{,}5 \cdot 10^{-9}$ F $= 2{,}5$ nF.

2° On constate aus i que l'intensité a pour amplitude

$$0{,}7 \text{ cm} \Rightarrow I_m = 0{,}7 \times 4 = 2{,}8 \text{ mA};$$

à $t = \dfrac{T_0}{4}$, $\omega_0 \cdot t = \dfrac{\pi}{2}$ et $i = I_m \Rightarrow i = 2{,}8$ mA.

— L'énergie de la self vaut : $\frac{1}{2} L \cdot i^2 = 10^{-7}$ J.

— L'énergie du condensateur est nulle et l'énergie électrique vaut donc 10^{-7} J.

3° A $t = \frac{T_0}{8}$, $\omega_0 \cdot t = \frac{\pi}{4}$ et $i = I_m \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow i = 2$ mA.

— L'énergie de la self vaut $\frac{1}{2} L \cdot i^2 = \frac{1}{4} L \cdot I_m^2 = 5 \cdot 10^{-8}$ J.

— L'énergie du condensateur est alors égale à celle de la self (l'énergie totale est constante).

3. **1°** $q_0 = C \cdot U$. *(Application numérique :* $q_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-4} C$.*)*
Pour les conventions de signe se rapporter à la **figure 1.** L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique est : $L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0$ dont la solution s'écrit :

$$q = q_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

et q_0 valeur maximale de la charge.

$$\omega_0 = 5\,780 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On choisit (l'énoncé ne le précisant pas) l'origine des dates $t = 0$ lorsque le condensateur porte la charge maximale q_0;

$$\text{à } t = 0 : \ q = q_0 \cdot \cos(+\varphi) \text{ d'où } \varphi = 0.$$

Ainsi : $q = q_0 \cos \omega_0 t$.
Application numérique : $q = 1{,}2 \cdot 10^{-4} \cos(5\,780 \cdot t)$.
Comme $i = \frac{dq}{dt}$, on a : $i = -q_0 \omega_0 \sin(5\,780t) = -0{,}69 \sin(5\,780t)$ (avec $I_m = 0{,}69A$).
L'énergie emmagasinée dans le condensateur est :

$$E_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \cos^2(5\,780t).$$

L'énergie emmagasinée dans la bobine est :

$$E_B = \frac{1}{2} L \cdot i^2 = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \sin^2(5\,780t).$$

On en déduit l'énergie totale du circuit oscillant :

$$E_C + E_B = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ J (cette énergie est constante).}$$

2° L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique non amorti est :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0 \text{ (car } m \cdot a = -k \cdot x).$$

La solution est :

$$x = x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ (A.N. : \omega_0 = 14{,}1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})$$

et x_0 amplitude maximale ($x_0 = 0{,}03$ m).
A l'instant $t = 0$: $x = x_0 = x_0 \cdot \cos(+\varphi)$, d'où $\varphi = 0$.

On en déduit : $x = 0{,}03 \cos(14{,}1t)$.
L'énergie mécanique du système est, à chaque instant :

$$E_m = E_c + E_p$$
$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2.$$

La conservation de l'énergie mécanique permet de calculer sa valeur à un instant particulier, par exemple à $t = 0$: $E_m = \frac{1}{2} k \cdot x_0^2$.

Application numérique : $E_m = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ J.

4. **1°** $q_m = C \cdot U = 1{,}5 \cdot 10^{-4} C$.
2° *a*) A l'instant $t = 0$: $u_{AB} = u_C = +12 V$.
On choisit, comme sens positif d'orientation, le sens A vers B dans la branche qui contient le condensateur. Ainsi, on a

$$u_{AB} = u_C = \frac{q}{C}$$
$$u_{AB} = e = -L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

et

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

L'équation différentielle du circuit oscillant est $L \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C} q = 0$.

Sa solution est $q = q_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$

(*A. N.* : $\omega_0 = 316$ rad$\cdot$s^{-1}).

A chaque instant t : $q = C \cdot u_c$ d'où $u_C = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$

or $$\frac{q_m}{C} = U_m = 12 \text{ V}$$

et à $t = 0$: $u_C = U = U_m \cdot \cos(+\varphi)$; d'où $\varphi = 0$.
Soit $u_C = 12 \cos 316t$.
$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2 \cdot 10^{-2}$ s $= 20$ ms est la période propre du circuit oscillant.
b) Sur l'oscillogramme l'amplitude est de 2 carreaux et la période de 4 carreaux.

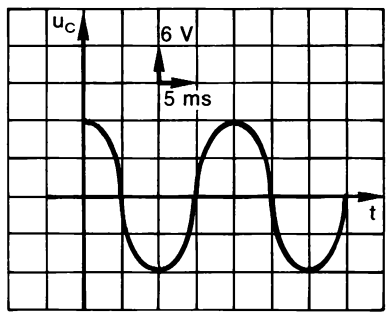


Fig. 7

c) Le circuit est maintenant un oscillateur harmonique amorti; si R est faible les oscillations sont pseudo-périodique de pseudo-période voisine de T_0; si R est grand, le régime de l'oscillateur est apériodique.

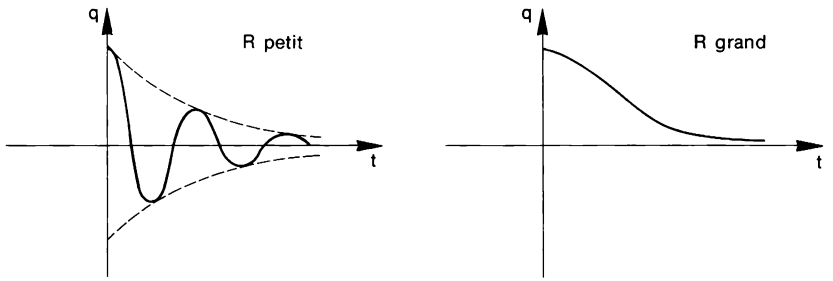
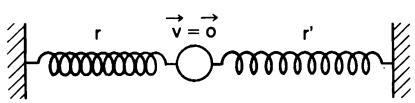
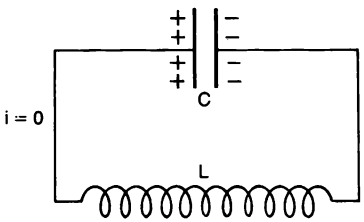


Fig. 8

5. Comparaison entre oscillations électriques et mécaniques





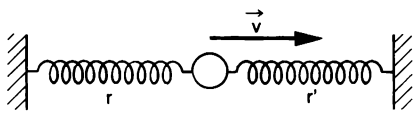
$t = 0$

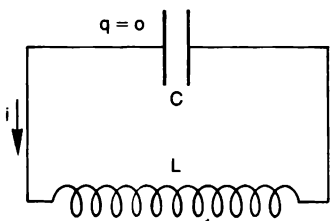
$E_m = E_p = \frac{1}{2} k x_m^2$

(ressorts)

$E_e = E_c = \frac{1}{2} \frac{q_m^2}{C}$

(condensateur)





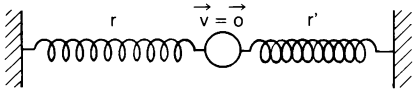
$t = \frac{T}{4}$

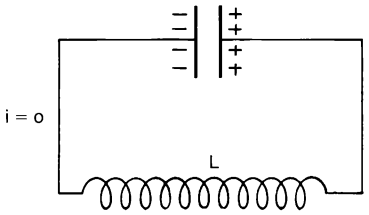
$E_m = E_c = \frac{1}{2} m v_m^2$

(masse)

$E_e = E_s = \frac{1}{2} L i_m^2$

(self)





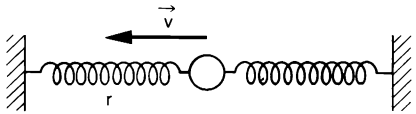
$t = \frac{T}{2}$

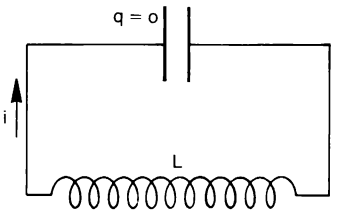
$E_m = E_p = \frac{1}{2} k x_m^2$

(ressorts)

$E_e = E_c = \frac{1}{2} \frac{q^2_m}{c}$

(condensateur)





$t = \frac{3T}{4}$

$E_m = E_c = \frac{1}{2} m v_m^2$

(masse)

$E_c = E_B = \frac{1}{2} l i_m^2$

(self)

Fig. 9

OSCILLATIONS FORCÉES EN RÉGIME SINUSOIDAL D'UN CIRCUIT RLC SÉRIE

17

Une tension sinusoïdale de pulsation ω est appliquée à un dipôle comprenant en série une résistance R, une inductance L et une capacité C. En régime stationnaire, on pose :

$$u = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{et} \quad i = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) \quad \text{avec} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant +\frac{\pi}{2};$$

φ est le déphasage de i par rapport à u.

1. Les valeurs efficaces de la tension et de l'intensité sont données par :

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Dans un circuit en fonctionnement elles sont données respectivement par un voltmètre et par un ampèremètre.

2. On appelle impédance du circuit RLC série, l'expression :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}.$$

On peut ainsi calculer $I = U/Z$ ou $I_m = U_m/Z$.

Corrélativement le déphasage φ est donné par :

$$\tan \varphi = \frac{L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}}{R}.$$

Si $L \cdot \omega > \dfrac{1}{C \cdot \omega}$: $0 < \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$:
$i(t)$ est en retard sur $u(t)$.

Si $L \cdot \omega = \dfrac{1}{C \cdot \omega}$: $\varphi = 0$:
$i(t)$ est en phase avec $u(t)$; c'est la résonance.

Si $L \cdot \omega < \dfrac{1}{C \cdot \omega}$: $\dfrac{-\pi}{2} \leqslant \varphi < 0$: $i(t)$ est en avance sur $u(t)$.

CONSTRUCTION DE FRESNEL

On sait que dériver un vecteur par rapport à son angle repère, c'est le faire tourner de $+\frac{\pi}{2}$ et que l'« intégrer », c'est donc le faire tourner de $-\frac{\pi}{2}$. Comme on dérive par rapport au temps il ne faudra pas oublier de multiplier par ω (et diviser par ω en intégrant). On traduit ainsi vectoriellement l'équation dont $i(t)$ est solution :

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+R\cdot i+\frac{1}{C}\left(\int i\cdot \mathrm{d}t\right)=u.$$

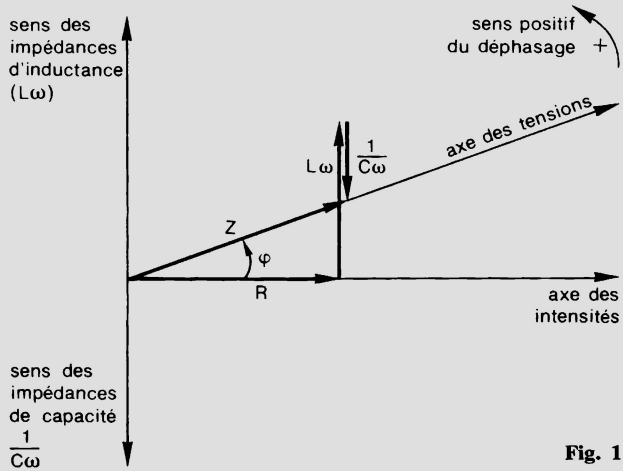


Fig. 1

L'axe des tensions fait avec un axe des temps non figuré un angle $(\omega\cdot t)$, tournant ainsi à la vitesse angulaire ω en entraînant l'axe des intensités dans une configuration relative immuable.

MÉTHODE DES NOMBRES COMPLEXES*

1. Extension complexe d'une grandeur sinusoïdale

A $s=S_m\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi)$ (S_m = amplitude; φ = phase à l'origine), on associe le nombre complexe : $s^*=S_m\cdot e^{j(\omega\cdot t+\varphi)}$.

A $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=S\cdot\cos\left(\omega\cdot t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$, on associera donc le nombre complexe :

$$\omega\cdot S_m\cdot e^{j(\omega\cdot t+\varphi+\frac{\pi}{2})}=e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\omega\cdot S_m\cdot e^{j(\omega\cdot t+\varphi)}=j\cdot\omega\cdot s^*\right).$$

* Les Auteurs ont beaucoup hésité à présenter cette méthode pour la bonne raison que les exercices du programme de Terminales n'en justifient jamais l'intérêt par rapport à la méthode de Fresnel; c'est la raison pour laquelle elle n'a été utilisée que pour un seul problème, comme variante de la solution (Pb n° **6**). Si l'élève ressent quelque difficulté à la comprendre et à l'appliquer, il est préférable qu'il s'attache alors à ne retenir que la méthode de Fresnel : l'utilisation des nombres complexes se fera en son temps, pour des circuits plus compliqués que le circuit RLC série.

Dériver s^* c'est le multiplier par $j \cdot \omega$ corrélativement, intégrer s^* c'est le diviser par $j \cdot \omega$ $\left(\text{ou, aussi bien multiplier par } -\frac{j}{\omega}\right)$.

On peut encore écrire :

$$s^* = S^* \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \quad \text{avec } S^* = S_m \cdot e^{j \cdot \varphi}.$$

S^* est l'*amplitude complexe :* son module est l'amplitude de s; son argument est la phase à l'origine de s.

2. Application au circuit RLC série

La réponse à une tension $u = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$ est le courant $i = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi)$. (Attention au signe $-$!)

Solution de l'équation :

$$L \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int i \cdot \mathrm{d}t = u.$$

En extension complexe on aura

$u^* = U^* \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ (avec ici $U^* = U_m$ car la phase à l'origine est nulle)

$$i^* = I^* \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \text{ (avec } I^* = I_m \cdot e^{-j \cdot \varphi})$$

et $\left(j \cdot L \cdot \omega + R + \frac{1}{j \cdot C \cdot \omega}\right) I^* = U^*$ (simplification par $e^{j \cdot \omega \cdot t}$ de chaque côté).

On appelle *impédance complexe :*

$$Z^* = j \cdot L \cdot \omega + R + \frac{1}{j \cdot C \cdot \omega} = R + j \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right).$$

La partie réelle de Z^* est la résistance R.

La partie imaginaire : $\left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)$ s'appelle *réactance.*

On retrouve ainsi une traduction de la méthode de Fresnel, la multiplication par j correspondant à une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ et la division par j (c'est-à-dire la multiplication par $-j$) correspondant à une rotation de $-\frac{\pi}{2}$.

Obtention de I_m et φ

— *Pour les modules :*

(module de Z^*) $\times$ (module de I^*) = module de U^*

on aura Z = module de $Z^* = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}$.

— *Pour les arguments :*

(argument de Z^*) + (argument de I^*) = argument de U^*

soit : argument de Z^* = argument de U^* − argument de I^*

argument de $Z^* = 0 - (-\varphi) = \varphi$.

On voit pourquoi il fallait prendre $(-\varphi)$ comme phase à l'origine de i!

On écrira donc :

$$Z^* = Z \cdot e^{j \cdot \varphi} \text{ et } U_m = Z \cdot I_m$$

(ou $U = Z \cdot I$, avec les valeurs efficaces).

Il est à noter que la formule des arguments, qui exprime que l'argument de Z^* est le déphasage entre le courant et la tension, reste vraie même si u présente une phase à l'origine; en effet, on aura :

$$u = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi) \quad \text{et} \quad i = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi - \varphi).$$

Argument de $Z^* = \psi - (\psi - \varphi) = \varphi$.

3. Intérêt de l'extension complexe

Tout circuit passif, aussi compliqué soit-il, peut être décrit comme une association (en série, en parallèle) d'impédances élémentaires de trois types :

résistance : R
inductance : $j \cdot L \cdot \omega$
capacitance : $\dfrac{1}{j \cdot C \cdot \omega}$.

EXERCICES

1. Calculer l'impédance d'une bobine de résistance $R = 10\ \Omega$ et d'inductance $L = 50$ mH, soumise à une tension sinusoïdale de fréquence $f = 50$ Hz.
   Réponse : $Z = 18{,}6\ \Omega$.

2. On mesure la tension aux bornes d'un dipôle $U = 12$ V. L'intensité du courant qui le traverse est 250 mA. Calculer son impédance.
   Réponse : $Z = 48\ \Omega$.

3. Quel est le déphasage de la tension aux bornes d'un condensateur par rapport à l'intensité?

   Réponse : la tension est en retard de $\dfrac{\pi}{2}$ sur l'intensité.

4. Un circuit RLC série est alimenté par une tension de fréquence $f = 100$ Hz. On donne $R = 30\ \Omega$, $L = 0{,}1$ H et $C = 0{,}02$ mF. Calculer l'impédance du circuit et le déphasage de l'intensité par rapport à la tension.
   Réponse : $Z = 34\ \Omega$; $\varphi = -29°$: $i(t)$ est en avance sur $u(t)$.

PROBLÈMES

1. Un circuit est alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence 50 Hz et de valeur efficace $U = 110$ V. Ce circuit est constitué d'une résistance $R = 20\ \Omega$, d'une inductance $L = 0{,}2$ H et d'un condensateur de capacité $C = 20\ \mu$F, montés en série.
   Calculer les tensions aux bornes de l'inductance et de la capacité.

2. On dispose d'un condensateur de capacité $C = 20\ \mu F$, d'une bobine de résistance $R = 10\ \Omega$ et d'inductance $L = 0{,}3$ H. Une générateur délivre une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 100$ V et de fréquence 50 Hz. Calculer l'intensité efficace du courant et le déphasage entre $i(t)$ et $u(t)$ lorsque le générateur est branché successivement :

1° aux bornes du condensateur;

2° aux bornes de la bobine;

3° à l'ensemble du condensateur et de la bobine montés en série.

3. Une bobine est parcourue par un courant de 12 A quand on applique entre ses bornes une tension continue de 120 V. Sous une tension alternative de valeur efficace 120 V et de fréquence 50 Hz, l'intensité efficace tombe à 5 A. Calculer l'inductance de la bobine et le déphasage courant-tension.

4. Entre deux points M et N, on maintient une différence de potentiel définie par l'expression : $u(t) = 70{,}7 \sin(314t)$.

1° En déduire la fréquence et la valeur efficace de cette tension.

2° On relie M et N par une résistance pure R et une bobine de résistance $r = 6\ \Omega$ et l'inductance L montées en série.
Sachant que l'intensité efficace du courant est $I = 5$ A et la différence de potentiel efficace aux bornes de R est de 10 V, calculer :
— la valeur de R
— l'impédance du circuit MN
— la valeur de l'inductance de la bobine.

5. Un générateur de tension alternative sinusoïdale maintient entre ses bornes une tension $u_{DA} = U_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$.
On place en série aux bornes de ce générateur une résistance $R = 100\ \Omega$ et une bobine d'inductance L et de résistance r **(fig. 2 *a*).**
On observe sur l'écran d'un oscillographe bicourbe les courbes représentant

$$u_{BA} = f(t) \text{ sur la voie } Y_1 \text{ et } u_{DA} = g(t) \text{ sur la voie } Y_2.$$

La sensibilité verticale est de 4 V par division pour les deux voies, et le balayage horizontal est de 1 ms par division.

1° A partir de l'examen de ces courbes, déterminer :

a) La période du courant établi; en déduire sa fréquence et sa pulsation.

b) Les tensions maximales aux bornes de la résistance et du générateur.

c) Le déphasage entre ces deux tensions.

2° Calculer l'intensité efficace du courant.

3° Calculer l'impédance du dipôle AD. En déduire la résistance et l'inductance de la bobine.

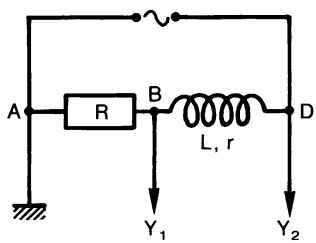


Fig. 2 *a*

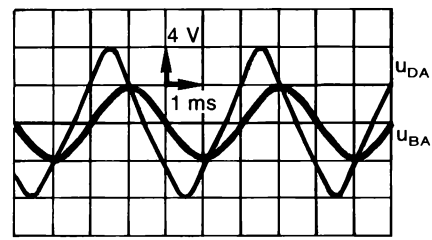


Fig. 2 *b*

6. Un circuit comprend en série une résistance R et un condensateur de capacité $C = 50$ nF. On applique entre les points A et B une tension sinusoïdale de valeur efficace 10 V et de fréquence 1 000 Hz.

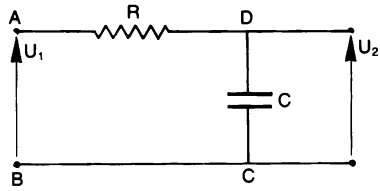


Fig. 3

1° Déterminer la valeur de R telle que $U_2 = 7{,}5$ V.

2° Déterminer le déphasage de u_2 par rapport à u_1.

3° Que peut-on dire de U_2 si la fréquence devient très grande? Très faible?

7. On associe en série un condensateur de capacité C et une bobine de résistance R et d'inductance L. L'ensemble est alimenté par une source de tension alternative sinusoïdale S de fréquence f.
On mesure les tensions efficaces aux bornes de S, aux bornes de la capacité et aux bornes de la bobine. On remarque que ces trois tensions sont égales.

1° Calculer l'inductance L et la capacité C en fonction de la résistance R et de la pulsation ω.
Application numérique : $R = 5\ \Omega$ et $f = 50$ Hz, fréquence de la tension.

2° Calculer dans les mêmes conditions le déphasage du courant i par rapport à la tension u aux bornes de S.

8. Pour une manipulation d'électricité, on dispose :
— d'une source de tension alternative ($f = 50$ Hz) de valeur efficace $U = 125$ V;
— d'une résistance non inductive R;
— d'un condensateur de capacité $C = 80 \cdot 10^{-6}$ F;
— d'un ampèremètre A d'impédance négligeable;
— d'une bobine B portant une plaque sur laquelle on lit $L = 0{,}125$ H.

1° R et C sont placés en série entre M et N; l'ampèremètre indique une intensité de valeur efficace $I_1 = 2{,}5$ A. Calculer :

a) la valeur de R;

b) le déphasage φ_1 entre la tension instantanée u aux bornes de la source et l'intensité instantanée i dans le circuit;

c) l'inductance L_1 d'une bobine de résistance nulle, susceptible, si elle était placée entre M et N, en série avec R et C, d'annuler le déphasage φ_1;

d) quelle serait alors l'intensité efficace I du courant dans le circuit.

2° La bobine B est placée en série avec R et C entre M et N. Le manipulateur a le désagrément de voir l'ampèremètre indiquer, non l'intensité I calculée en 1° *d*) mais $I_2 = 3{,}5$ A.

a) Après avoir calculé l'impédance Z_2 de la portion MN de circuit, montrer, en s'appuyant sur des constructions de Fresnel, que cette intensité inattendue peut s'expliquer (entre autre) par une des deux possibilités suivantes :

— l'inductance de B est bien celle indiquée sur la plaque, mais sa résistance r n'est pas nulle;
— la résistance de B non mentionnée est négligeable, mais la valeur de L indiquée sur la plaque est erronée.

b) Pour savoir laquelle de ces hypothèses est la bonne, l'expérimentateur observe les variations à l'oscilloscope, en fonction du temps des tensions u_1 aux bornes de R, et u_2 entre M et N. Il constate que u_2 a sur u_1 une avance de phase φ_2 très voisine de $+\frac{\pi}{6}$ radian.

Laquelle des hypothèses énoncées plus haut est valable?
Préciser l'inductance de la bobine.

9. Un circuit comprend, montés en série :
une résistance $R = 100\ \Omega$;
une bobine d'inductance L et de résistance négligeable;
un condensateur de capacité C.
Une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace $U = 150$ V et de fréquence f réglable est appliquée aux bornes du circuit.

1° Pour une valeur f_1 de la fréquence, les tensions efficaces aux bornes des appareils sont telles que $U_L = U_C = 3U_R$.
Déterminer :

a) les valeurs de U_R, U_L et U_C;

b) l'intensité efficace I dans le circuit;

c) le déphasage φ entre la tension appliquée aux bornes du circuit et l'intensité.

2° La tension appliquée gardant la valeur efficace $U = 150$ V, on règle la fréquence à la valeur $f_2 = 2f_1$. Déterminer :

a) l'intensité efficace I';

b) le déphasage φ' entre la tension appliquée aux bornes du circuit et l'intensité;

c) la tension efficace existant entre les bornes de chaque appareil.

10. On dispose d'une résistance $R = 20\ \Omega$; d'un condensateur de capacité $C = 10^{-6}$ F et d'une bobine d'inductance $L = 0{,}25$ H et de résistance négligeable. On réalise successivement trois circuits (figures 4 *a*), 4 *b*), 4 *c*)) à l'aide de ces composants. Pour alimenter ces circuits on utilise la même source S de tension sinusoïdale u de valeur efficace U_0, de pulsation ω variable.

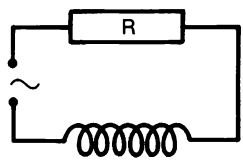


Fig. 4 *a*

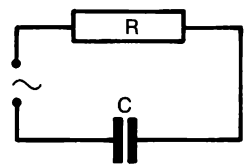


Fig. 4 *b*

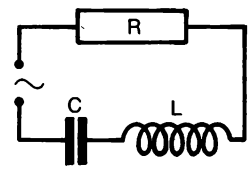


Fig. 4 *c*

1° On étudie l'impédance de chaque circuit en fonction de ω.
On trouve les courbes *a*, *b* et *c* ci-dessous :

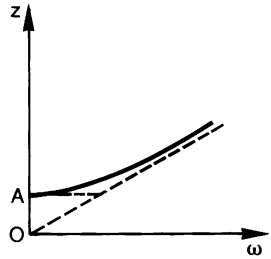


Fig. 5 *a*

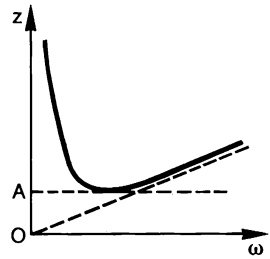


Fig. 5 *b*

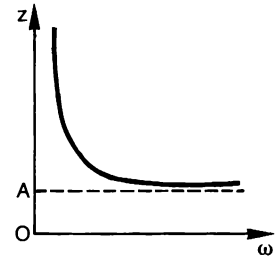


Fig. 5 *c*

a) Donner les expressions de l'impédance de chacun des circuits (R, L), (R, C) et (R, L, C).

b) Laquelle de ces trois courbes correspond au circuit (R, L), au circuit (R, C) ou au circuit (R, L, C)? Justifier dans chaque cas l'allure de la courbe.

c) Que représente l'ordonnée commune A figurant sur chacune de ces courbes?

2° On considère le circuit (R, L, C) alimenté par la source S. On fait varier ω, pulsation de la source S.

a) Montrer que si $L \cdot C \cdot \omega^2$ est très inférieur à 1, l'expression de l'impédance peut être simplifiée. En déduire la nature du composant qui, aux basses fréquences, fait obstacle au passage du courant.

b) Montrer que si $L \cdot C \cdot \omega^2$ est très supérieur à 1, l'expression de l'impédance peut être simplifiée. En déduire la nature du composant qui, aux fréquences élevées, fait obstacle au passage du courant.

c) Calculer la fréquence pour laquelle l'impédance est la plus faible. Un des composants, bobine ou condensateur, est-il prépondérant pour cette valeur de la fréquence?

11. On alimente successivement par un même tension alternative sinusoïdale $u_{AC} = U_m \cdot \cos(\omega t)$, les dipôles 1 et 2 représentés restivement sur les **figures 6*a*** et **7*a***.

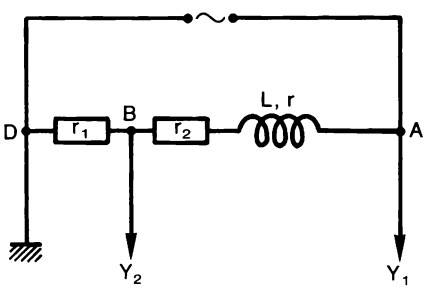


Fig. 6 *a*

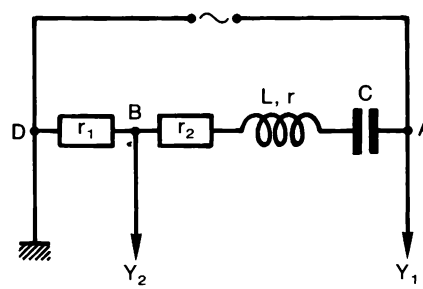


Fig. 7 *a*

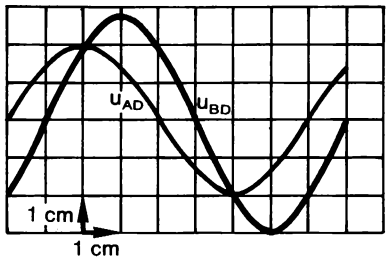


Fig. 6 *b*

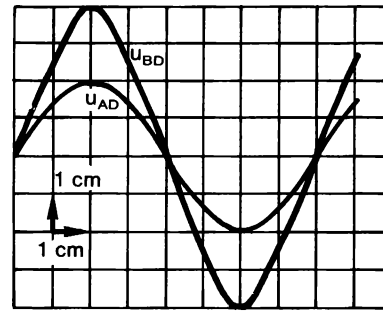


Fig. 7 *b*

Le dipôle 1 comprend en série : deux résistances $r_1 = 10\ \Omega$ et $r_2 = 32\ \Omega$ et une bobine d'inductance L et de résistance r.
Le dipôle 2 comprend en série : les deux résistances précédentes, la bobine précédente et un condensateur de capacité C.
On visualise sur le même oscillographe bicourbe les variations des tensions u_{AD} (sur la voie Y_1) et u_{BD} (sur la voie Y_2) en fonction du temps.
Les caractéristiques de l'oscillographe sont les suivantes :
$2{,}5 \cdot 10^{-3}$ s·cm^{-1} pour la base de temps qui commande le balayage horizontal.
Voie Y_1 : 5 V·cm^{-1} pour la dérivation verticale.
Voie Y_2 : 0,5 V·cm^{-1} pour la déviation verticale.
Les courbes visualisées à l'oscillographe sont représentées pour chaque dipôle sur les **figures 6 *a* et 7 *b*.**

1° Donner l'expression de $u_{AD} = U_m \cdot (\cos \omega \cdot t)$ en précisant les valeurs de U_m et ω.

2° Quels sont les déphasages de l'intensité par rapport à la tension u_{AD} dans les deux cas?

3° Utiliser les résultats expérimentaux pour calculer la résistance r de la bobine.

4° Calculer les valeurs numériques de l'inductance L de la bobine et de la capacité C du condensateur.

SOLUTIONS

1. La tension aux bornes de L s'écrit $U_L = L \cdot \omega \cdot I$ et l'intensité du courant vaut :
$I = \dfrac{U}{Z}$. Avec Z impédance du circuit : $Z = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}\right)^2} = 98{,}5\ \Omega$,

donc $$U_L = L \cdot \omega \cdot I = L \cdot \omega \frac{U}{Z} = 70{,}1\ \text{V}.$$

De même, la tension aux bornes de C s'écrit $U_c = \dfrac{I}{C \cdot \omega} = \dfrac{U}{Z \cdot C \cdot \omega} = 178$ V.

2. **1°** L'impédance du condensateur seul est $\dfrac{1}{C \cdot \omega}$ donc $I = U \cdot C \cdot \omega = 0{,}63$ A.

$i(t)$ est en avance de $\dfrac{\pi}{2}$ sur $u(t)$.

2° L'impédance de la bobine s'écrit $Z_B = \sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} = 94{,}7\ \Omega$;
donc $I = \dfrac{U}{Z} = 1{,}05$ A et $\tan \varphi_B = \dfrac{L \cdot \omega}{R} = 9{,}42$ donc $\varphi_B = 84°$; $i(t)$ est en retard de 84° sur $u(t)$.

3° L'impédance du circuit s'écrit : $Z = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}\right)^2} = 65{,}8\ \Omega$;

donc $I = \dfrac{U}{Z} = 1{,}52$ A et $\tan \varphi = \dfrac{L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}}{R} = -6{,}5$, $\varphi = -81°$.

$i(t)$ est en avance de 81° sur $u(t)$.

3. En courant continu seule la résistance de la bobine a un rôle,

$$R = \frac{U}{I} = \frac{120}{12} = 10\ \Omega.$$

En alternatif l'impédance de la bobine est

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} = 24\ \Omega \quad \text{et} \quad L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} = 0{,}07\ \text{H}.$$

De $\tan \varphi = \dfrac{L \cdot \omega}{R}$, on déduit $\varphi = 65°$; $i(t)$ est en retard de 65° sur $u(t)$.

4. **1°** $U_{max} = 70{,}7\ \text{V} = U \cdot \sqrt{2}$, donc $U = 50$ V.

$$\omega = 314\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} = 2\pi \cdot f \qquad f = 50\ \text{Hz}.$$

2° Soit U_R la tension efficace aux bornes de R : $U_R = R \cdot I$; $R = 2\Omega$.
L'impédance du circuit est définie par $Z = \dfrac{U}{I} = \dfrac{50}{5} = 10\ \Omega$.
Cette impédance se calcule avec $Z = \sqrt{(R + r)^2 + L^2 \cdot \omega^2}$; $L = 0{,}019$ H.

5. **1°** *a*) La période représente 4 divisions, donc $T = 4$ ms.
Il vient $f = 250$ Hz et $\omega = 1\,570\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
b) Les tensions maximales sont $U_{DA\,max} = 8$ V et $U_{BA\,max} = 4$ V.
c) u_{BA} est en retard de $\dfrac{1}{8}$ de période sur u_{DA}; le déphasage entre les deux tensions est donc $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

2° Aux bornes de R, on écrit

$$U_{BA\,eff} = R \cdot I_{eff} \quad \text{avec} \quad U_{BA\,eff} = \frac{U_{BA\,max}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{et} \quad R = 100\ \Omega.$$

On en déduit : $I_{\text{eff}} = 28{,}3$ mA.

3° Par définition $\cos \varphi = \dfrac{R + r}{Z} = 0{,}707$.

D'autre part : $Z = \dfrac{U_{DA\,\max}}{I_{\max}} = 200\ \Omega$.

On en déduit $r = Z \cdot \cos \varphi - R = 41{,}4\ \Omega$.

L'impédance de la portion de circuit AD est

$$Z = \sqrt{(R + r)^2 + L^2\omega^2}$$

d'où $$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - (R + r)^2} = 0{,}09 \text{ H}.$$

6. 1° Aux bornes du condensateur $U_2 = \dfrac{I}{C \cdot \omega}$,

soit $Z = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2 \cdot \omega^2}}$ l'impédance du circuit, alors

$$I = \frac{U_1}{Z}, \quad \text{donc} \quad U_2 = \frac{U_1}{C \cdot Z \cdot \omega} = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 \cdot C^2 \cdot \omega^2 + 1}}.$$

De cette expression on tire $R = \dfrac{1}{C \cdot \omega} \sqrt{\dfrac{U_1^2}{U_2^2} - 1}$.

L'application numérique donne $R = 2\,800\ \Omega$.

2° $\tan \varphi = \dfrac{-1}{R \cdot C \cdot \omega}$ donne le déphasage φ de $i(t)$ par rapport à $u_1(t)$;

d'autre part $u_2(t)$ est déphasé de $+\dfrac{\pi}{2}$ par rapport à $i(t)$.

Soit θ le déphasage de $u_2(t)$ par rapport à $u_1(t)$: $\theta = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$; l'application numérique donne $\varphi = -49°$ et $\theta = +41°$; $u_2(t)$ est en retard de 41° sur $u_1(t)$.

3° On a démontré que $U_2 = \dfrac{U_1}{\sqrt{R^2 \cdot C^2 \cdot \omega^2 + 1}}$.

Si la fréquence devient très grande, ω tend vers ∞ et $U_2 \to 0$: la capacité se comporte comme un court-circuit.

Si la fréquence tend vers 0, ω aussi et $U_2 \to U_1$, la capacité se comporte comme un circuit ouvert.

On dit qu'une capacité laisse passer les hautes fréquences et coupe les basses.

Utilisation de la méthode des nombres complexes pour la résolution de cet exercice

1° $u_1 = U_{1m} \cdot \cos(\omega \cdot t) \Rightarrow U_1^* = U_{1m} \quad (U_{1m} = U_1 \cdot \sqrt{2})$

$u_2 = U_{2m} \cdot \cos(\omega \cdot t - \theta) \Rightarrow U_2^* = U_{2m} \cdot e^{-j \cdot \theta} \quad (U_{2m} = U_2 \cdot \sqrt{2})$

$i = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) \Rightarrow I^* = I^* \cdot e^{-j \cdot \theta} \quad (I_m = I \cdot \sqrt{2})$

La loi des mailles permet d'écrire :

$$u_1 = u_{AD} + u_2 \Rightarrow U_1^* = U_{AD}^* + U_2^*.$$

Soit $$U_1^* = Z^* \cdot I^* = \left(R - \frac{j}{C\omega}\right) \cdot I^*$$

de même $$U_2^* = \frac{-j}{C \cdot \omega} I^*.$$

On déduit :

$$\frac{U_2^*}{U_1^*} = \frac{\dfrac{-j}{C \cdot \omega}}{R - \dfrac{j}{C \cdot \omega}} = \frac{-j}{R \cdot C \cdot \omega - j} = \frac{1}{1 + jR \cdot C \cdot \omega}.$$

Soit, pour les modules : $\dfrac{U_{2m}}{U_{1m}} = \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$; on trouve facilement :

$$R^2 \cdot C^2 \cdot \omega^2 = \frac{U_1^2}{U_2^2} - 1 \Rightarrow R = \frac{1}{C\omega} \sqrt{\frac{U_1^2}{U_2^2} - 1}.$$

(*A. N. :* $R = 2\,800\ \Omega$).

2° Pour les arguments on trouve :

argument de $U_2^* =$ (argument de U_1^*) − argument de $(1 + j \cdot R \cdot c \cdot \omega)$
soit : $\theta =$ argument de $(1 + j \cdot R \cdot C \cdot \omega)$
et $\tan \theta = R \cdot C \cdot \omega$

(*A. N. :* $\tan \theta = 0{,}882 \Leftrightarrow \theta \simeq 41°$).
La tension u_2 est en retard sur la tension u_1.

3° Cette question se traite comme indiquée plus haut.

Remarques : il n'a pas été nécessaire de calculer le déphasage φ de l'intensité.

On peut évidemment le calculer comme argument de $Z^* = R - \dfrac{j}{C\omega}$:

$$\tan \varphi = -\frac{1}{R \cdot C \cdot \omega} = -\frac{1}{\tan \theta} \Rightarrow \varphi = 41° - 90° = 49°.$$

(i est en avance sur u_1).
Mais on peut aussi remarquer, que :

$$I^* = j \cdot C \cdot \omega \cdot U_2^* \Rightarrow \text{argument de } I^* = \frac{\pi}{2} + \text{argument de } U_2^*$$

$$\Rightarrow -\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \varphi = \theta - \frac{\pi}{2}.$$

7. 1° Soit U_B la tension efficace aux bornes de la bobine, son impédance est

$$Z_B = \sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega^2}, \quad \text{donc} \quad U_B = \sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega^2} \cdot I.$$

Soit U_C la tension efficace aux bornes de la capacité, son impédance est $Z_C = \dfrac{1}{C \cdot \omega}$, donc $U_C = \dfrac{I}{C \cdot \omega}$, et soit U la tension efficace aux bornes du

circuit, son impédance est

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}, \quad \text{donc} \quad U = \frac{I}{\sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}}.$$

Or $U = U_B = U_C$, des trois expressions des tensions efficaces on déduit :

$$R^2 + \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)^2 = \frac{1}{C^2 \cdot \omega^2} \quad (1)$$

et

$$R^2 + L^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{C^2 \cdot \omega^2}. \quad (2)$$

(1) et (2) donne $2L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega} = 0$.

De (2) on tire : $L = \frac{R}{\omega \sqrt{3}}$, puis $C = \frac{\sqrt{3}}{2R \cdot \omega}$

(*A. N. :* $L = 9{,}2$ mH et $C = 5{,}5 \cdot 10^{-4}$ F.)

2° $\tan \varphi = \frac{L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}}{R}$ permet de calculer le déphasage φ de $i(t)$ par rapport à $u(t)$.

A. N. : $\varphi = -30°$, $i(t)$ est en avance de 30° sur $u(t)$.

8. 1° *a*) L'impédance Z_1 est donnée par $Z_1 = \frac{U}{I_1} = 50\ \Omega$.

Elle se calcule d'autre part avec $Z_1 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \cdot \omega^2}}$,

donc

$$R = \sqrt{Z_1^2 - \frac{1}{C^2 \cdot \omega^2}} = 30{,}25\ \Omega.$$

b) Le déphasage φ_1 entre $i(t)$ et $u(t)$ aux bornes de la source est donné par

$$\tan \varphi_1 = \frac{-1}{R \cdot C \cdot \omega}, \quad \text{donc} \quad \varphi_1 = -53°.$$

$u(t)$ est en retard de 53° sur $i(t)$.

c) Si le déphasage entre $i(t)$ et $u(t)$ est annulé, le circuit fonctionne à la résonance, dans ces conditions $L_1 \cdot C \cdot \omega^2 = 1$.

A. N. : $L_1 = 0{,}127$ H, cette valeur correspond à l'inductance indiquée sur la plaque de la bobine *B*.

d) $I = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{R} = 4{,}13$ A.

2° *a*) L'impédance Z_2 du circuit MN est $Z_2 = \frac{U}{I_2} = 35{,}7\ \Omega$.

1er cas : l'inductance de la bobine est 0,125 H et sa résistance est *r*, alors $L \cdot C \cdot \omega^2 = 1$, le circuit fonctionne toujours à la résonance, mais son impédance est $Z_2 = R + r = 35{,}7\ \Omega$ **(fig. 8*a*).**

2^e *cas :* l'intensité $i(t)$ n'est plus en phase avec $u(t)$, soit φ_2 ce déphasage; on a encore : $U = Z_2 \cdot I = 125$ V **(fig. 8*b*).**

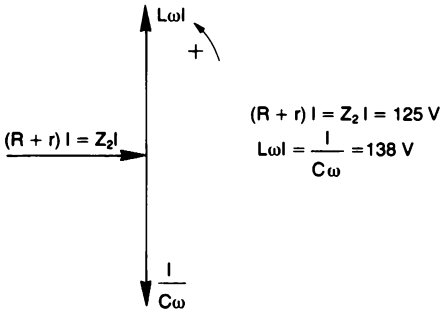


Fig. 8 *a*

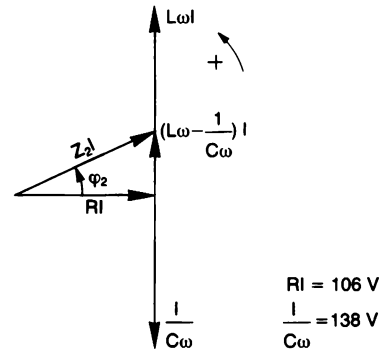


Fig. 8 *b*

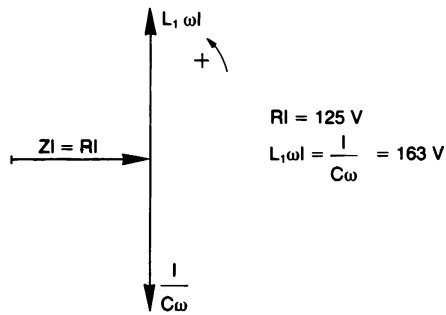


Fig. 9

Remarque : la **figure 9** correspond à la situation « théorique » calculée en **1°** *c*).

b) Le 2^e cas ci-dessus correspond à la situation expérimentale, ainsi $\varphi_2 = +30°$, d'autre part $\tan \varphi_2 = \dfrac{L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}}{R} = 0{,}577$, d'où l'on tire

$$L = \frac{R \cdot \tan \varphi_2 + \dfrac{1}{C \cdot \omega}}{\omega}.$$

Application numérique : $L = 0{,}18$ H.

9. 1° *a*) L'impédance de la bobine est $Z_L = L \cdot \omega$ donc $U_L = L \cdot \omega \cdot I$ (I intensité efficace).

L'impédance du condensateur est $Z_C = \dfrac{1}{C \cdot \omega}$ donc $U_C = \dfrac{I}{C \cdot \omega}$.

Aux bornes de la résistance on écrit : $U_R = R \cdot I$.

Comme $U_L = U_C = 3U_R$ il vient : $L \cdot \omega = \dfrac{1}{C \cdot \omega} = 3 \cdot R (= 300\ \Omega)$.

L'impédance du circuit RLC est $Z = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}\right)^2} = R$;

d'où $U = Z \cdot I = R \cdot I$ et $U_L = L \cdot \omega \cdot \dfrac{U}{R} = 3 \cdot R \cdot \dfrac{U}{R} = 450$ V

donc $U_C = U_L = 450$ V; $U_R = U = 150$ V.

b) $I = \dfrac{U}{R} = 1{,}5$ A.

c) $L \cdot \omega = \dfrac{1}{C \cdot \omega}$. Le circuit fonctionne à la résonance, l'intensité est en phase avec la tension aux bornes du circuit.

2° *a*) Si $f_2 = 2f_1$, alors :

$$\omega_2 = 2\omega_1 \Rightarrow L \cdot \omega_2 = 2L \cdot \omega_1 = 600\ \Omega$$

et $$\frac{1}{C \cdot \omega_2} = \frac{1}{2C \cdot \omega_1} = 150\ \Omega.$$

L'impédance du circuit est $Z' = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega_2 - \dfrac{1}{C \cdot \omega_2}\right)^2} = 461\ \Omega$.

Ainsi : $I = \dfrac{U}{Z'} = 0{,}325$ A;

b) Le déphasage est donné par :

$$\tan \varphi = \frac{L \cdot \omega_2 - \dfrac{1}{C \cdot \omega_2}}{R} = 4{,}5; \quad \varphi = 78°.$$

c) $U'_L = L \cdot \omega_2 \cdot I' = 195$ V; $U'_C = \dfrac{1}{C \cdot \omega_2} \cdot I' = 49$ V; $U'_R = R \cdot I' = 32{,}5$ V.

10. 1° *a*) Pour le circuit I : $Z_I = \sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega^2}$;

pour le circuit II : $Z_{II} = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{C^2 \cdot \omega^2}}$;

pour le circuit III : $Z_{III} = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega + \dfrac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}$.

b) Z_I est une fonction croissante de ω, elle est représentée par le schéma de la **figure 5 *a***.
Z_{II} est une fonction décroissante de ω, elle est représentée par le schéma de la **figure 5 *c***.
Par conséquent la fonction $Z_{III}(\omega)$ est représentée sur la **figure 5 *b***.

Étude sommaire de la fonction $Z_I(\omega)$:

si $\omega = 0$, $Z = R$: la fonction est croissante à partir de $Z = R$;
si ω est très grand, R devient négligeable devant $L \cdot \omega$; donc $Z_I \to L \cdot \omega$;
d'où la représentation de l'asymptote sur la **figure 5 *a*.**

Étude sommaire de la fonction $Z_{II}(\omega)$:

si $\omega \to 0$, l'impédance Z_{II} tend vers ∞; la fonction est décroissante et tend vers R lorsque ω tend vers des valeurs élevées.

Étude sommaire de la fonction $Z_{III}(\omega)$:

si $\omega \to 0$, l'impédance tend vers ∞; on retrouve la même limite que pour la fonction $Z_{II}(\omega)$;
si ω tend vers de grandes valeurs, la fonction est croissante et tend vers l'asymptote $Z = L \cdot \omega$.

Le minimum de la fonction $Z_{III}(\omega)$ est atteint pour $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$; alors $Z = R = 20\ \Omega$.
Voir le graphe de cette fonction sur la **figure 5 *b*.**

c) Comme on l'a montré ci-dessus, l'ordonnée A est telle que $Z = R$.

2° *a*) $Z_{III} = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}$

$= \sqrt{R^2 + \left(\dfrac{L \cdot C \cdot \omega^2 - 1}{C \cdot \omega}\right)^2}$.

Si $L \cdot C \cdot \omega^2$ est très inférieur à 1, il vient $Z_{III} \to Z_{II} \to \infty$ $\left(\text{pour } R \ll \dfrac{1}{C \cdot \omega}\right)$
par exemple pour $\omega < 500$ rad/s.
Alors $I = \dfrac{U_0}{Z_{II}} \to 0$, le condensateur fait obstacle au passage du courant.

b) Si $L \cdot C \cdot \omega^2$ est très supérieur à 1, $Z_{III} \to Z_I \to L \cdot \omega$
$\left(\text{si } \omega \gg \dfrac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \text{ par exemple, pour } \omega > \dfrac{10}{\sqrt{L \cdot C}} : \omega > 20\,000 \text{ rad/s.}\right)$.
Dans ces conditions, l'intensité dans le circuit est très faible et l'on peut conclure que la bobine fait obstacle au passage du courant aux fréquences élevées.

c) En reprenant le résultat de la question **1°** *c*), $Z = R$ à la résonance, soit lorsque $L \cdot C \cdot \omega_0^2 = 1$, il vient $\omega_0 = 2\,000$ rad/s et $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 318$ Hz.
Aucun des deux composants, bobine ou condensateur n'est prépondérant.

11. 1° Sur l'oscillogramme, la période est représentée par 8 cm, soit

$$T = 8 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 0{,}02 \text{ s}.$$

La pulsation vaut : $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
Sur l'oscillogramme, l'amplitude de u_{AD} est représentée par 2 cm, soit

$$U_m = 2 \cdot 5 = 10 \text{ V} \quad \text{(sur la voie } Y_1\text{)};$$

d'où $$u_{AD} = 10 \cos 314 \cdot t.$$

2° Pour le dipôle 1 (**fig. 6**), u_{BD} est en retard de 1/8 de période sur u_{AD}, soit un déphasage angulaire de $\frac{\pi}{4}$.

L'intensité $i(t)$ est en phase avec la tension u_{BD}; on en déduit que $i(t)$ est en retard de $\frac{\pi}{4}$ sur la tension u_{AD}.

Pour le dipôle 2 (**fig. 7**), u_{BD} est en phase avec u_{AD}; et comme $i(t)$ est aussi en phase avec u_{BD}, on en déduit que $i(t)$ est en phase avec u_{AD}.

3° Pour le dipôle 2 on peut écrire :

$$I_m = \frac{U_{BDm}}{r_1} = 0{,}2 \text{ A} \quad (\text{avec } U_{BDm} = 4 \cdot 0{,}5 \text{ V sur la voie } Y_2)$$

et $Z = r_1 + r_2 + r$ car ce dipôle fonctionne à la résonance.

D'autre part, $Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{10}{0{,}2} = 50\ \Omega$; on en déduit $r = 8\ \Omega$.

4° Pour le dipôle 1, le retard de $\frac{\pi}{4}$ de $i(t)$ sur u_{BD} permet d'écrire :

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{L \cdot \omega}{r_1 + r_2 + r}, \quad \text{d'où} \quad L = \frac{1}{\omega}(r_1 + r_2 + r)\tan\frac{\pi}{4}$$

$$L = 0{,}16 \text{ H}.$$

Pour le dipôle 2, qui fonctionne à la résonance, on peut écrire :

$$L \cdot C \cdot \omega^2 = 1, \quad \text{d'où} \quad C = \frac{1}{L \cdot \omega^2}$$

$$C = 6{,}4 \cdot 10^{-5} \text{ F}.$$

LA RÉSONANCE POUR UN CIRCUIT *RLC* SÉRIE

18

Un circuit RLC série est soumis à une tension sinusoïdale de fréquence variable, la courbe $I = f(\omega)$ de l'intensité efficace du courant en fonction de la pulsation a l'allure suivante :

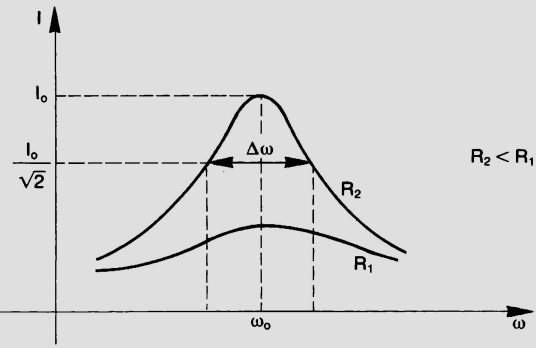


Fig. 1

Les différentes courbes obtenues en changeant la valeur de R, passent par un maximum pour $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ qui définit la résonance.

A la résonance, l'intensité instantanée dans le circuit est en phase avec la tension instantanée aux bornes de l'ensemble du dipôle *RLC*.

On appelle **facteur de qualité** $Q = \dfrac{L \cdot \omega_0}{R} = \dfrac{1}{R \cdot C \cdot \omega_0}$, il caractérise **l'acuité de la résonance :**

— si Q est petit, la résonance est floue (cas de R_1 sur la **fig. 1**);
— si Q est grand, la résonance est aiguë (cas de R_2 sur la **fig. 1**).
Dans ce dernier cas, des tensions très importantes sont mesurables aux bornes de L et de C; on les appelle surtensions.

On définit la bande passante du circuit par $\Delta f = \dfrac{\Delta\omega}{2\pi}$ pour $I = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$ (voir **fig. 1**).

On démontre que $\Delta f = \dfrac{R}{2\pi \cdot L} = \dfrac{f_0}{Q}$ avec $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$.

EXERCICES

1. Un circuit comprend en série une résistance $R = 10\ \Omega$, une inductance pure $L = 0{,}1$ H et un condensateur de capacité C. Il est alimenté par une tension sinusoïdale ($f = 50$ Hz) de valeur efficace $U = 12$ V.

   a) Pour quelle valeur de C le circuit est-il en résonance?

   b) Calculer la tension aux bornes de L, aux bornes de C.

   Réponse : $C = 10^{-4}$ F; $U_L = U_C = 38$ V.

2. Un circuit comprend une résistance $R = 10\ \Omega$, une inductance pure L et une capacité C en série. On mesure $U_L = U_C = 60$ V lorsqu'il est alimenté par une tension alternative ($f = 50$ Hz) de valeur efficace $U = 20$ V.

   a) Calculer L et C.

   b) Quel est le facteur de qualité de ce circuit?

   Réponse : $L = 0{,}1$ H et $C = 10^{-4}$ F; $Q = 3{,}14$.

3. Un circuit RLC série de facteur de qualité $Q = 40$ est alimenté par une tension alternative de valeur efficace $U = 15$ V. Calculer les tensions aux bornes de L et de C à la résonance.

   Réponse : $Q = \dfrac{U_L}{U} = \dfrac{U_C}{U}$, donc $U_L = U_C = 600$ V.

4. Un circuit RLC série est alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence variable ($R = 8\ \Omega$, $L = 0{,}2$ H et $C = 5\ \mu$F).

   a) Pour quelle valeur de la fréquence y a-t-il résonance?

   b) Calculer la bande passante de ce circuit.

   Réponse : $f_0 = 159$ Hz, $\Delta f = 6{,}4$ Hz.

PROBLÈMES

1. On branche sur une prise du secteur ($U = 127$ V; $f = 50$ Hz) un circuit comprenant en série un condensateur C, une résistance de $5\ \Omega$ et une inductance de 1 H.

   1° Calculer C pour qu'il y ait résonance.

   2° Calculer les tensions qui existent aux bornes de la résistance, de la capacité et de l'inductance.

   3° Calculer le déphasage entre ces deux dernières tensions.

2. Un circuit comprenant en série une résistance $R = 150\ \Omega$, une inductance pure $L = 0{,}1$ H et une capacité est alimenté par un courant sinusoïdal d'expression $i = I_M \sin(\omega \cdot t)$, de fréquence $f = 400$ Hz. La tension efficace aux bornes de l'inductance vaut 100 V.

   1° Calculer l'intensité efficace du courant.

2° En déduire la tension aux bornes de R.

3° Sachant que la tension aux bornes de la capacité est la même que la tension aux bornes de l'inductance, calculer la valeur de C.

4° Donner l'expression des tensions instantanées aux bornes de R, L et C.

3. Un circuit électrique comprend une bobine, d'inductance L et de résistance R, montée en série avec un condensateur de capacité $C = 5{,}48 \cdot 10^{-6}$ F. L'ensemble constitue un dipôle RLC série.
Un générateur de tension maintient aux bornes du dipôle une différence de potentiel sinusoïdale, de valeur efficace $U = 93$ mV et de fréquence N variable. On mesure l'intensité efficace du courant I dans le circuit pour différentes valeurs de la fréquence N. Les résultats obtenus sont portés dans le tableau suivant :

N (Hz)	160	180	200	205	210	215	220	225	230	240	250	270	300
I (mA)	1,0	1,8	4,3	6	8,1	9,3	7,2	5,7	4,7	3,2	2,4	1,5	1

1° Tracer la courbe $I = f(N)$ dans l'intervalle de fréquences compris entre 160 et 300 Hz.

La valeur maximale I_0 du courant est obtenue pour la fréquence $N_0 = 215$ Hz.

2° En utilisant les résultats expérimentaux, calculer R et L.

3° Soit N_1 et N_2 les valeurs de la fréquence pour lesquelles l'intensité efficace du courant est $I_1 = I_2 = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$.

Calculer la valeur du rapport $A = \dfrac{N_0}{N_2 - N_1}$.

4° Calculer le facteur de qualité Q du circuit à partir des valeurs de R, L, C et N_0.
Comparer A et Q. Conclusion.

4. Une portion de circuit AB comprend, montés en série, une bobine de résistance R et d'inductance L, un condensateur de capacité C et un ampèremètre de résistance et d'inductance négligeable. On applique entre A et B une tension alternative sinusoïdale de fréquence f réglable dont la valeur efficace est maintenue constante $U_0 = 15$ V. Lorsqu'on fait varier la fréquence f, on constate d'une part que l'intensité efficace du courant dans le circuit passe par un maximum $I_0 = 20$ mA pour une valeur particulière f_0 de la fréquence; d'autre part, en dehors de ce cas particulier, il existe toujours deux valeurs de la fréquence pour lesquelles l'ampèremètre donne la même indication.

1° Justifier ces observations.

2° L'ampèremètre indique 10 mA pour les deux fréquences

$$f_1 = 900 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_2 = 2\,500 \text{ Hz}.$$

Déterminer les valeurs de la résistance R, de l'inductance L, de la capacité C et de la fréquence f_0.

3° Quelle est la bande passante de ce circuit? Calculer son facteur de qualité. Pour quelles valeurs l'intensité appartient-elle a la bande passante?

5. On monte en série une résistance $R = 200\ \Omega$, une inductance $L = 2$ H, et un condensateur de capacité $C = 0{,}02\ \mu$F. On branche ce circuit à une source de tension sinusoïdale de valeur efficace constante égale à 100 V et de fréquence N variable (voir **figure**).

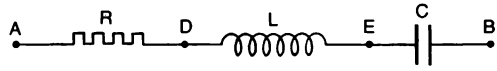


Fig. 2

A. 1° *a*) Calculer la valeur N_0 de la fréquence pour laquelle l'intensité efficace est la plus grande possible.

b) Calculer la valeur numérique I_0 de ce maximum de l'intensité efficace.

2° Calculer pour $N = N_0$, les valeurs efficaces des tensions aux bornes de la résistance, de l'inductance, du condensateur.

3° Pour $N = N_0$, l'expression de la valeur instantanée du courant électrique est

$$i(t) = I_0\sqrt{2}\,\sin(\omega_0 \cdot t),$$

ou ω_0 est la pulsation correspondant à la fréquence N_0.

a) Donner les expressions des valeurs instantanées $u_R(t)$, $u_L(t)$ et $u_C(t)$ des tensions aux bornes de la résistance de l'inductance et de la capacité.

b) Quelle serait l'indication du voltmètre alternatif si on le branchait entre les points D et B du circuit?

4° Calculer pour $N = N_0$, la puissance consommée :

a) dans la résistance,

b) dans l'ensemble du circuit.

B. L'intensité efficace du courant traversant le circuit AB est maintenant $I = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$ (I_0 est la valeur trouvée dans la première partie).

1° Calculer l'impédance du circuit AB.

2° Soit X la réactance du circuit. Montrer qu'il existe deux valeurs possibles pour X notées X_1 et X_2.

3° Exprimer en fonction de R, L et C les pulsations ω_1 et ω_2 correspondant aux valeurs X_1 et X_2 de la réactance. On ne retiendra que les solutions physiquement acceptables et l'on vérifiera que $\omega_1 - \omega_2 = \dfrac{R}{L}$.

C. 1° *a*) Les valeurs numériques de l'intensité efficace I pour différentes fréquences N, relevées expérimentalement, sont indiquées ci-dessous :

N (Hz)	760	765	770	775	780	785	790	795	800	805	810	815	820	825	830	835
I (mA)	106	123	145	177	223	296	404	498	442	328	246	193	158	133	115	102

Construire la courbe représentative de $I = f(N)$ pour N supérieure à 760 Hz.
b) Placer sur le graphe les points G et H pour lesquels l'intensité efficace a pour valeur $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, G est le point correspondant à la fréquence la plus faible.

2° *a*) A l'aide du graphe, déterminer les valeurs numériques des fréquences N_G et N_H pour lesquelles $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs numériques correspondantes ω_G et ω_H de la pulsation du courant.
b) Évaluer la différence $\omega_H - \omega_G$.
Cette valeur correspond-elle au résultat établi au **B. 3°**?
c) Comment pour une valeur de L, la valeur de R influe-t-elle sur l'allure du graphe (valeur du maximum I_0 de l'intensité efficace et largeur de bande GH)?

SOLUTIONS

1. **1°** A la résonance $L \cdot C \cdot \omega^2 = 1$ avec $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $L = 1$ H, $C = 10{,}14$ μF.

2° $I = \frac{U}{Z}$ et à la résonance $Z = R$ donc $I = 25{,}4$ A.
La tension aux bornes de R est $U_R = R \cdot I = 127$ V.
La tension U_L aux bornes de l'inductance est égale à la tension U_C aux bornes de la capacité :

$$U_L = U_C = L \cdot \omega \cdot I = \frac{I}{C \cdot \omega} = 7976 \text{ V} \simeq 8000 \text{ V}.$$

3° La tension instantanée u_L aux bornes de L est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur $i(t)$, la tension instantanée u_C aux bornes de C est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur $i(t)$, donc $u_L(t)$ et $u_C(t)$ sont en opposition de phase.

2. **1°** La tension efficace aux bornes de l'inductance s'exprime par :

$$U_L = L \cdot \omega \cdot I \quad \text{avec} \quad \omega = 2\pi \cdot f = 2512 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad L = 0{,}1 \text{ H};$$
$$U_L = 100 \text{ V} \quad \text{donc} \quad I = 0{,}4 \text{ A}.$$

2° Soit U_R la tension efficace aux bornes de R : $U_R = R \cdot I = 60$ V.

3° Soit U_C la tension efficace aux bornes de C : $U_C = U_L$;

donc $$L \cdot \omega \cdot I = \frac{I}{C \cdot \omega}, \quad L \cdot \omega = \frac{1}{C \cdot \omega},$$

le circuit fonctionne à la résonance :

$$C = \frac{1}{L \cdot \omega^2} = 1{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ F}.$$

4° La tension instantanée $u_R(t)$ est en phase avec $i(t)$,

$$u_R(t) = 60 \cdot \sqrt{2} \sin(\omega \cdot t) = 85 \sin(\omega \cdot t).$$

La tension instantanée $u_L(t)$ aux bornes de L est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur $i(t)$:

$$u_L(t) = 100\sqrt{2} \sin\left(2\,512t + \frac{\pi}{2}\right) = 140 \sin\left(2\,512t + \frac{\pi}{2}\right).$$

La tension instantanée $u_C(t)$ aux bornes de la capacité est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur $i(t)$:

$$u_C(t) = 140 \sin\left(2\,512t - \frac{\pi}{2}\right).$$

3. 1° Voir **figure 3.** Soit $I_0 = 9{,}3$ mA pour $N_0 = 215$ Hz.

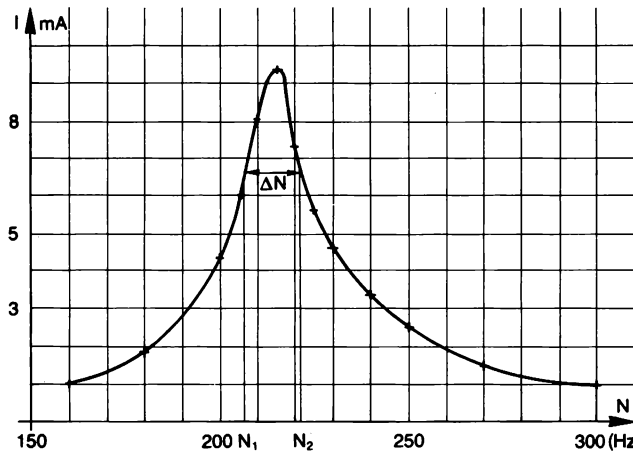


Fig. 3

2° La fréquence N_0 est la fréquence de résonance car l'intensité du courant est maximale à cette fréquence; alors : $L \cdot C \cdot \omega_0^2 = 1$ avec $\omega_0 = 2\pi \cdot N_0$.
On calcule $L = 0{,}1$ H.
A la résonance : $U = Z \cdot I_0 = R \cdot I_0$ ($Z = R$); d'où $R = 10\ \Omega$.

3° Soit $I_1 = I_2 = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}} = 6{,}6$ mA.

Sur la **figure 3,** on lit $N_1 = 206$ Hz et $N_2 = 222$ Hz.

$$A = \frac{N_0}{N_2 - N_1} = 13{,}44.$$

4° Soit Q le facteur de qualité; par définition $Q = \dfrac{L \cdot \omega_0}{R} \left(= \dfrac{1}{R \cdot C \cdot \omega_0} \right)$:

$Q = 13{,}5$.

Conclusion : $Q = A$ ou $Q = \dfrac{N_0}{N_2 - N_1} = \dfrac{L \cdot \omega_0}{R} = \dfrac{1}{R \cdot C \cdot \omega_0}$.

4. 1° L'intensité dans le circuit est donnée par $I = \dfrac{U_0}{Z}$

avec $\quad Z = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}$

donc $\quad I = \dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}}$.

Une étude sommaire de la fonction $I(\omega)$ permet de vérifier qu'elle est croissante lorsque $\dfrac{1}{C \cdot \omega} > L \cdot \omega$ pour des valeurs croissantes de ω (voir **fig. 3**).

Cette fonction devient décroissante lorsque ω est telle que $L \cdot \omega > \dfrac{1}{C \cdot \omega}$.

En conséquence, elle passe par un maximum pour $L \cdot C \cdot \omega_0^2 = 1$; or $\omega_0 = 2 \cdot \pi f_0$.

L'intensité I a alors la valeur $I_0 = 20$ mA.

La fonction $I(\omega)$ étant croissante pour $\omega < \omega_0$ puis décroissante pour $\omega > \omega_0$, il est normal d'observer pour deux valeurs de la fréquence (ou de la pulsation) la même intensité I.

2° On écrit $Z = \dfrac{U_0}{I} = 1\,500\ \Omega$ pour $I = 10$ mA.

De plus, lorsque $\omega = \omega_0$: $Z = R$ (ce qui caractérise la résonance)

$$\text{d'où} \quad R = \frac{U_0}{I_0} = 750\ \Omega.$$

De l'expression $Z = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}$

on déduit : $\left(L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}\right)^2 = Z^2 - R^2$.

Il vient : $\left(L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}\right) = \pm\sqrt{Z^2 - R^2}$.

Pour la fréquence f_1 : $\omega_1 = 2\pi f_1$, $\left(L \cdot \omega_1 - \dfrac{1}{C \cdot \omega_1}\right) = -\sqrt{Z^2 - R^2}$.

Pour la fréquence f_2 : $\omega_2 = 2\pi f_2$, $\left(L \cdot \omega_2 - \dfrac{1}{C \cdot \omega_2}\right) = +\sqrt{Z^2 - R^2}$

$$L \cdot \omega_1^2 - \frac{1}{C} = -\omega_1 \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$L \cdot \omega_2^2 - \frac{1}{C} = +\omega_2 \sqrt{Z^2 - R^2}$$

Il vient $$L(\omega_2^2 - \omega_1^2) = (\omega_2 + \omega_1)\sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi(f_2 - f_1)}.$$

Application numérique : $L = 0{,}13$ H.
En remplaçant dans l'une des équations ci-dessus, on trouve $C = 8{,}7 \cdot 10^{-8}$ F.

$L \cdot C \cdot \omega_0^2 = 1$ donc $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = 9\,420$ rad·s^{-1} et $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 1\,500$ Hz.

3° La bande passante est définie par $\Delta f = \dfrac{R}{2\pi \cdot L} = 920$ Hz.

Le facteur de qualité est $Q = \dfrac{f_0}{\Delta f} = 1{,}6$; c'est une valeur faible : la résonance d'intensité pour ce circuit est floue.
L'intensité appartient à la bande passante si

$$\frac{I_0}{\sqrt{2}} \leqslant I \leqslant I_0$$

soit $$14{,}1 \text{ mA} \leqslant I \leqslant 20 \text{ mA}.$$

5. A. 1° *a*) Soit U la tension efficace appliquée entre A et B et I l'intensité efficace du courant; $U = Z \cdot I$ pour U fixée à 100 V; pour que I soit la plus grande possible, il faut que Z, impédance du circuit, soit minimale; ainsi le circuit fonctionne à la résonance, alors $Z = R$ et $L \cdot C \cdot \omega_0^2 = 1$; on calcule :

$$\omega_0 = 5\,000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 800 \text{ Hz}.$$

b) $U = R \cdot I_0$ à la résonance donc $I_0 = 0{,}5$ A.

2° A la résonance la tension U_R aux bornes de R est égale à U (100 V), les tensions U_L aux bornes de L et U_C aux bornes de C sont égales :

$$U_L = U_C = L \cdot \omega_0 \cdot I_0 = \frac{I_0}{C \cdot \omega_0} = 5\,000 \text{ V}$$

(que l'on qualifie de surtensions).

3° *a*) La tension instantanée $u_R(t)$ aux bornes de R est en phase avec l'intensité $i(t)$:

$$u_R(t) = 100 \cdot \sqrt{2} \sin(5\,000t) = 140 \sin(5\,000t).$$

La tension instantanée $u_L(t)$ aux bornes de L est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur $i(t)$.

$$u_L(t) = 5\,000 \cdot \sqrt{2} \sin\left(5\,000t + \frac{\pi}{2}\right) = 7\,070 \sin\left(5\,000t + \frac{\pi}{2}\right).$$

La tension instantanée $u_C(t)$ aux bornes de C est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur $i(t)$:

$$u_C(t) = 7\,070 \sin\left(5\,000t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Remarques : les déphasages de ces trois tensions instantanées par rapport à $i(t)$ serait les mêmes pour une fréquence différente de N_0.
b) Les deux tensions instantanées $u_L(t)$ et $u_C(t)$ sont en opposition de phase et de même valeur efficace à chaque instant $u_L(t) + u_C(t) = 0$, la tension efficace mesurée avec un voltmètre entre les points D et B est nulle.

4° *a et b*) Par définition $P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$ dans lequel φ est le déphasage de $i(t)$ par rapport à $u(t)$, tension instantanée appliquée entre A et B.
A la résonance : $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = 1$, donc $P = U \cdot I_0 = 50$ W.
La puissance est uniquement consommée dans la résistance, les deux puissances demandées sont identiques.

B. 1° Soit $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0{,}35$ A.
L'impédance du circuit est définie par $Z = \frac{U}{I} = 283\ \Omega$.

2° D'autre part l'impédance se calcule grâce à $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, donc :

$$Z^2 - R^2 = X^2 \quad \text{et} \quad X = \pm\sqrt{Z^2 - R^2}, \quad X = \pm 200\ \Omega,$$

ainsi deux valeurs X_1 et X_2 de la réactance sont possibles.

3° La valeur de X est donnée par $X = L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}$.

- *1er cas :* $X_1 = 200 = L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}$ conduit à l'équation :

$$L \cdot C \cdot \omega^2 - 200C \cdot \omega - 1 = 0$$

qui admet deux solutions, l'une positive est physiquement acceptable, l'autre est négative; on retient $\omega_1 = 5\,050$ rad·s^{-1}.

- *2e cas :* $X_2 = -200 = L \cdot \omega = -\frac{1}{C \cdot \omega}$ conduit à l'équation :

$$L \cdot C \cdot \omega^2 + 200C \cdot \omega - 1 = 0$$

qui admet deux solutions, dont une seule positive est physiquement acceptable : $\omega_2 = 4\,950$ rad·s^{-1}.
De ces deux valeurs, on tire $\omega_1 - \omega_2 = 100$ rad·s^{-1}.

D'autre part :

$$\frac{R}{L}=\frac{200}{2}=100 \text{ (unité homogène à rad}\cdot\text{s}^{-1}\text{)}.$$

Conclusion : $\omega_1-\omega_2=\frac{R}{L}$.

C. 1° *a*) Voir **figure 4 :**

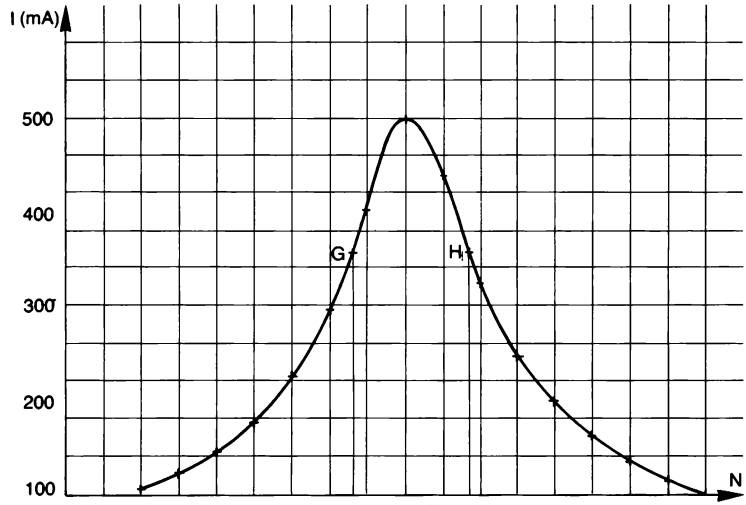


Fig. 4

b) Soit $I=\frac{I_0}{\sqrt{2}}=352$ mA.

Sur la figure, on lit $N_G=788$ Hz et $N_H=804$ Hz.

2° *a*) On déduit : $\omega_G=2\pi\cdot N_G=4949$ rad$\cdot$s^{-1}

et $\omega_H=2\pi\cdot N_H=5049$ rad$\cdot$s^{-1}.

Ces deux valeurs sont respectivement très voisines de ω_2 et ω_1 calculées à la question **B. 3°.**

b) $\omega_H-\omega_G=100$ rad$\cdot$s^{-1};

c) à la résonance $I_0=\frac{U}{R}$ donc I_0 varie comme $1/R$;

d'autre part, $\Delta\omega=\frac{R}{L}$ donc la largeur de bande augmente avec R.

Si R est grand, la résonance est floue; si R est petit, la résonance est aiguë. (Voir **figure 1,** au début du chapitre.)

PUISSANCE

19

La puissance instantanée est définie par : $P(t) = u(t) \cdot i(t)$.
C'est une grandeur peu intéressante et on préfère — pour la consommation énergétique — définir une puissance moyenne.

1. Puissance moyenne

Un dipôle soumis à une tension alternative de valeur efficace U et parcouru par un courant de valeur efficace I consomme la puissance moyenne :

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad \varphi : \text{déphasage entre } u(t) \text{ et } i(t).$$

Le terme $U \cdot I$ *s'appelle* **puissance apparente;** il s'exprime en VA.
Le terme **cos** φ s'appelle **facteur de puissance.**

2. Cas d'un circuit RLC *série*

En introduisant l'impédance $Z = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}$

on aura : $\cos \varphi = \dfrac{R}{Z}$ et $U = Z \cdot I$

$$\Rightarrow P = R \cdot I^2 \text{ (en watts).}$$

La puissance est consommée uniquement par la résistance.

Remarque : la quantité $X = L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}$ s'appelle **réactance** du circuit. La réactance ne consomme pas de puissance.

EXERCICES

1. On alimente un circuit de résistance $R = 25\ \Omega$ et de réactance $X = 30\ \Omega$ par une tension sinusoïdale ($f = 50$ Hz) de valeur efficace $U = 100$ V. Quelle est la puissance moyenne consommée par ce circuit?
Réponse : 164 W.

2. Un circuit RLC série a une impédance de 150 Ω. On mesure la tension efficace aux bornes de la résistance : $U_R = 15$ V, l'intensité efficace du courant est 0,2 A. Calculer le facteur de puissance de ce circuit.
Réponse : 0,5.

3. Sur un circuit RLC série, on mesure avec l'oscilloscope une avance de phase de $\frac{\pi}{6}$ de la tension instantanée aux bornes de la résistance par rapport à la tension instantanée aux bornes du circuit. Calculer le facteur de puissance du circuit.
Réponse : 0,87.

4. L'impédance d'un circuit RLC de résistance $R = 12\ \Omega$ est 36 Ω. Il est alimenté par une tension alternative de valeur efficace $U = 60$ V. Calculer son facteur de puissance, la puissance apparente et la puissance moyenne consommée.
Réponse : $\cos \varphi = 0{,}33$, $U \cdot I = 100$ V·A et $P = 33$ W.

PROBLÈMES

1. La tension efficace aux bornes d'une installation est 110 V. La puissance consommée est 4,4 kW lorsque l'intensité de courant vaut 50 A. Calculer la puissance apparente et le facteur de puissance du circuit.

2. Un circuit comprend une résistance de 20 Ω et une inductance L. Il est alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence 50 Hz. Calculer la valeur de L sachant que le facteur de puissance est 0,8. Calculer la capacité d'un condensateur qui ramènerait le facteur de puissance à l'unité.

3. On monte en série, un condensateur de capacité $C = 4 \cdot 10^{-6}$ F et une bobine d'inductance $L = 1$ H et de résistance $R = 500\ \Omega$. Aux bornes de la portion de circuit ainsi constitué, on applique une tension alternative sinusoïdale de fréquence variable et de valeur efficace $U = 220$ V.

   1° Pour quelle valeur de la fréquence, la puissance dissipée dans la portion de circuit est-elle maximale? Quelles sont les valeurs de la puissance et du déphasage courant-tension dans ces conditions?

   2° Pour quelles valeurs f_1 et f_2 de la fréquence, la puissance dissipée dans la portion de circuit est-elle égale à la moitié de la puissance maximale précédente?

   3° Déterminer la bande passante du circuit. Comparer ce résultat à la valeur de $f_2 - f_1$ correspondant aux deux résultats précédents. Conclusion.

4. Une usine alimentée en courant alternatif sinusoïdal par un réseau de distribution d'énergie électrique est équivalent à un dipôle de résistance R et de réactance X. La tension sinusoïdale à l'entrée de l'usine, c'est-à-dire

aux bornes de ce dipôle, a une valeur efficace U. L'intensité du courant qui traverse le dipôle a une valeur efficace I.

1° Soit φ le déphasage de l'intensité par rapport à la tension. Exprimer $\cos \varphi$ en fonction de R et X. Exprimer en fonction de U, I et $\cos \varphi$ la puissance P consommée par l'usine.

2° L'usine est connectée au générateur par une ligne équivalente, au total, à un dipôle de résistance r et de réactance x suivant le schéma. La force

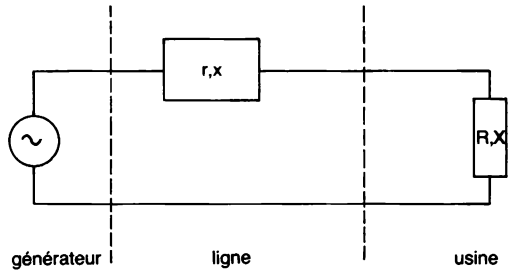


Fig. 1

électromotrice sinusoïdale du générateur est ajustée de façon que la valeur de la tension aux bornes de l'usine soit U. Calculer en fonction de r, P, U et $\cos \varphi$, le rapport $\frac{p}{P}$ entre la puissance p dissipée dans la ligne et la puissance P délivrée à l'usine.

3° Au vu de ce résultat, peut-on expliquer pourquoi :
a) Le fournisseur d'électricité E. D. F. fait payer plus cher l'énergie fournie aux utilisateurs si leur $\cos \varphi$ est « mauvais », et qu'entend-on par « mauvais » $\cos \varphi$?

Application numérique : $r = 2\ \Omega$, $P = 10$ MW; $\cos \varphi = 0{,}943$. $U = 15$ kV. Calculer $\frac{p}{P}$.

b) Ce même fournisseur transporte l'énergie sur de grandes distances sous des tensions très élevées, ce qui nécessite un transformateur élévateur de tension à la sortie du générateur et un transformateur abaisseur de tension à l'entrée de l'usine.
Expliquer pourquoi il y a avantage à transporter l'énergie électrique sous haute tension.

5. Un moteur est traversé, en régime d'utilisation normale, par un courant alternatif sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz, de pulsation ω et de valeur efficace $I = 2$ A. Le courant fournit au moteur en régime d'utilisation normale une puissance moyenne $P = 400$ W.
Le moteur est assimilable à une bobine RL de résistance R, de réactance $X = L \cdot \omega$ et de facteur de puissance $\cos \varphi = 0{,}8$.

1° Quelle est, en régime d'utilisation normale, la tension efficace U aux bornes du moteur? Calculer R et X.

2° Ce moteur ne satisfait pas les normes de l'E. D. F. qui exige que l'on

mette en série avec le moteur un condensateur de capacité C pour que l'ensemble ait un cos $\varphi' = 0{,}9$. Quelles sont les valeurs possibles de C? Quelle est alors la valeur efficace de la tension U' aux bornes de l'ensemble moteur-condensateur pour que le moteur fonctionne normalement, c'est-à-dire qu'il soit traversé par un courant de valeur efficace $I = 2$ A comme au 1°?

6. On applique au circuit représenté sur la **figure 2** une tension u_{AB} sinusoïdale de fréquence f. On fait varier f en maintenant la valeur efficace de cette tension constante et égale à $U_0 = 0{,}95$ V.

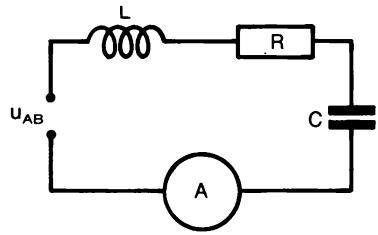


Fig. 2

La mesure de l'intensité efficace I pour différentes valeurs de la fréquence f permet de construire la courbe de la **figure 3.**

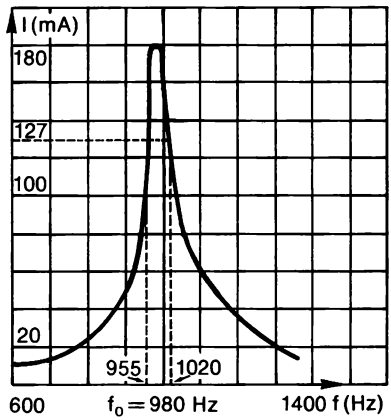


Fig. 3

1° Sachant que $C = 2 \cdot 10^{-6}$ F et en utilisant les données expérimentales, calculer l'inductance L, la résistance r du circuit ainsi que la puissance maximale P dissipée dans le circuit.

2° Calculer la valeur efficace de I lorsque la puissance dissipée est égale à la moitié de P. En déduire le facteur de qualité Q du circuit.

7. On applique une tension sinusoïdale de valeur efficace U et de pulsation ω aux bornes d'un circuit comprenant en série une résistance R, une inductance L et un condensateur de capacité C.

A. On considérera les valeurs suivantes : $U = 0{,}2$ V; $L = 2$ mH; $R = 6\ \Omega$ et $\omega_1 = 30{,}15 \cdot 10^3$ rad·s^{-1}. Calculer les deux valeurs de C qui produisent entre l'intensité et la tension un déphasage de $\pi/4$.
Quelles sont les intensités efficaces dans les deux cas?
On utilise dans la suite du problème, la valeur de C pour laquelle la tension est en retard de phase sur l'intensité.

B. On étudie comment varie, en fonction de R, la puissance P consommée dans la portion de circuit.

1° Construire la courbe $P = f(R)$ dans le cas où U, L, C et ω_1 ont les valeurs de la question précédente, R variant entre 0 et 15 ohms.
Pour quelle valeur de R la puissance consommée est-elle maximale?

2° Montrer que dans tous les cas, c'est-à-dire pour des valeurs quelconques mais constantes de U, L, C, ω (sauf pour celles qui correspondent à $L \cdot C \cdot \omega^2 = 1$) la puissance maximale obtenue par un choix convenable de R correspond toujours à un déphasage de $\pi/4$ entre intensité et tension.

3° A quel cas important correspond l'exception précédente? Indiquer, qualitativement, comment varie P en fonction de R dans ce cas.

SOLUTIONS

1. $P_{app} = U \cdot I = 5{,}5$ kVA.

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad \text{donc} \quad \cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I} = 0{,}8.$$

2. $\cos \varphi = \dfrac{R}{Z} = 0{,}8$. Z impédance du circuit : $Z = \sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega^2}$,

donc : $$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{R}{\cos \varphi}\right)^2 - R^2} = 48 \text{ mH}.$$

Si $\cos \varphi = 1$, le circuit fonctionne à la résonance donc $L \cdot C \cdot \omega^2 = 1$;

d'où : $$C = \frac{1}{L \cdot \omega^2} = 2{,}1 \cdot 10^{-4} \text{ F}.$$

3. 1° Par définition,

$$P = U \cdot I \cos \varphi$$

avec $\cos \varphi = \dfrac{R}{Z}$ et $Z = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}$

donc : $$P = \frac{R \cdot U^2}{Z^2} = \frac{R \cdot U^2}{R^2 + \left(L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}.$$

Pour que la puissance P soit maximale, il faut que Z soit minimale, donc que le circuit fonctionne à la résonance : $L \cdot C \cdot \omega^2 = 1$;

d'où : $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = 500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 79{,}6 \text{ Hz} \simeq 80 \text{ Hz}$.

Dans ces conditions de fonctionnement, $P_0 = \dfrac{U^2}{R} = 96{,}8 \text{ W} \simeq 100 \text{ W}$.

A la résonance, l'intensité instantanée $i(t)$ est en phase avec la tension instantanée $u(t)$ appliquée au circuit.

2° Soit P telle que $P = \frac{P_0}{2}$.

Il vient : $$\frac{U^2}{2R} = \frac{R \cdot U^2}{R^2 + \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}.$$

En développant : $$R^2 = \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)^2,$$

donc : $$R = \pm\left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right).$$

• *1er cas* : $R = \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)$, il vient $L \cdot C \cdot \omega^2 - R \cdot C \cdot \omega - 1 = 0$.

Cette équation admet deux solutions dont une seule positive a une signification physique :

$$\omega_1 = \frac{RC + \sqrt{R^2 \cdot C^2 + 4L \cdot C}}{2L \cdot C} = 809 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 129 \text{ Hz}.$$

• *2e cas* : $R = -\left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)$, il vient $L \cdot C \cdot \omega^2 + R \cdot C \cdot \omega - 1 = 0$.

Cette équation admet deux solutions dont une seule positive a une signification physique :

$$\omega_2 = \frac{-R \cdot C + \sqrt{R^2 \cdot C^2 + 4L \cdot C}}{2L \cdot C} = 309 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \text{donc} \quad f_2 = 49{,}2 \text{ Hz}.$$

3° On définit la bande passante par $f = \frac{R}{2\pi \cdot L} = 79{,}6$ Hz.

D'autre part, $f_1 - f_2 = 79{,}8$ Hz.

Ainsi la bande passante d'un circuit *RLC* série correspond à l'intervalle de fréquences pour lesquelles la puissance consommée dans le circuit est la moitié de la puissance maximale que consomme le circuit à la résonance.

4. 1° L'impédance Z du dipôle équivalent à l'usine est $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$.

Or $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$, donc $\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$.

Par définition : $P = U \cdot I \cos \varphi$.

2° La puissance dissipée dans la ligne s'écrit $p = r \cdot I^2$.

D'autre part, de $P = U \cdot I \cos \varphi$, on tire $I = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi}$.

D'où $$p = r \cdot I^2 = r \cdot \frac{P^2}{U^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

et $$\frac{p}{P}=\frac{r\cdot P}{U^2\cdot\cos^2\varphi}.$$

a) D'après l'expression précédente de p/P, ce rapport est d'autant plus grand que cos φ est plus petit (pour U, r et P fixés), ce rapport mesure la consommation relative de puissance dans la ligne rapportée à la consommation de l'usine, bien entendu la consommation de puissance dans la ligne n'est d'aucune utilité, le fournisseur E. D. F. a donc intérêt à rendre cette consommation la plus faible possible, il impose à ses clients (l'usine) un facteur de puissance élevé (proche de 1); pratiquement un « mauvais » cos φ est inférieur à 0,8.

Application numérique : $\frac{p}{P}=0{,}1$, soit 10 % de la puissance consommée par l'usine.

b) Le rapport p/P permet de constater qu'il est proportionnel à $1/U^2$ dans lequel U représente la tension de sortie de la ligne. L'E. D. F. a donc intérêt pour réduire la consommation de puissance dans la ligne à avoir U le plus grand possible donc à transporter l'énergie électrique sous des hautes tensions.

5. **1°** $P=U\cdot I\cos\varphi$ d'où $U=\frac{P}{I\cdot\cos\varphi}=250$ V.

L'impédance du moteur est $Z=\frac{U}{I}=125\ \Omega$.

On peut écrire $\cos\varphi=\frac{R}{Z}$ d'où $R=Z\cdot\cos\varphi=100\ \Omega$

et $\tan\varphi=\frac{X}{R}$ d'où $X=R\cdot\tan\varphi=75\ \Omega$ (pour une bobine $\varphi>0$).

2° Lorsque le condensateur est en série avec le moteur, on a :

$$\tan\varphi'=\frac{L\cdot\omega-\frac{1}{C\cdot\omega}}{R}=\frac{X-\frac{1}{C\cdot\omega}}{R}.$$

On en déduit $C=\frac{1}{(X-R\tan\varphi')}$.

Comme $\cos\varphi'=0{,}9$, deux cas sont possibles :

— φ' est positif (i est en retard sur u), donc $\tan\varphi'=+0{,}48$.

Application numérique : $C=1{,}2\cdot10^{-4}$ F;

— φ' est négatif (i est en avance sur u), donc $\tan\varphi'=-0{,}48$.

Application numérique : $C=2{,}6\cdot10^{-5}$ F.

La tension aux bornes de l'ensemble moteur-condensateur est

$$U'=Z'\cdot I \quad \text{avec} \quad Z'=\frac{R}{\cos\varphi'} \quad \text{d'où} \quad U'=\frac{R\cdot I}{\cos\varphi'}=222\text{ V}.$$

Remarque : la puissance moyenne fournie au moteur est identique à la

valeur donnée dans l'énoncé ($P = 400$ W); on peut aisément le vérifier en calculant

$$P = U' \cdot I \cdot \cos \varphi'.$$

6. 1° Lorsque l'intensité I passe par le maximum $I_0 = 180$ mA, le circuit fonctionne à la résonance, alors $L \cdot C \cdot \omega_0^2 = 1$ pour la fréquence $f_0 = 980$ Hz.

Il vient $L = \dfrac{1}{C \cdot \omega_0^2} = \dfrac{1}{4\pi^2 \cdot C \cdot f_0^2} = 0{,}013\,2$ H.

A la résonance, l'impédance du circuit vaut $Z = r$; or $r = \dfrac{U_0}{I_0}$

d'où $r = 5{,}3\ \Omega$.

Dans un circuit RLC série, la puissance est consommée (par effet Joule) dans la résistance, la puissance moyenne s'écrit $P = r \cdot I^2$.
Cette valeur est maximale lorsque l'intensité I est maximale, donc à la résonance;
on en déduit $P = r \cdot I_0^2 = 0{,}17$ W.

2° Soit I_1 l'intensité du courant lorsque la puissance moyenne dissipée est $\dfrac{P}{2}$; on a $\dfrac{P}{2} = r \cdot I_1^2$ d'où $I_1 = \sqrt{\dfrac{P}{2r}} = 127$ mA.

Or on peut vérifier que $I_1 = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$.

Cette valeur $I_1 = 127$ mA permet de définir la largeur de bande passante :

$$\Delta f = 1\,020 - 955$$
$$\Delta f = 65 \text{ Hz}.$$

Le facteur de qualité est $Q = \dfrac{f_0}{\Delta f} = 15{,}1$.

(On peut vérifier cette valeur en écrivant $Q = \dfrac{L \cdot \omega_0}{r} = 15{,}1$.)

7. A. $\tan \varphi = \dfrac{L \cdot \omega - \dfrac{1}{C \cdot \omega}}{R}$, donc $C = \dfrac{1}{L \cdot \omega^2 - R \cdot \omega \cdot \tan \varphi}$.

• *1er cas :* $\varphi = +\dfrac{\pi}{4}$, $\tan \varphi = 1$, $L = 2$ mH et $R = 6\ \Omega$, $\omega = 30{,}15 \cdot 10^3$ rad·s^{-1}.

Application numérique : $C = 6{,}11 \cdot 10^{-7}$ F.

• *2e cas :* $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$, $\tan \varphi = -1$.

Application numérique : $C = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ F.

Avec $\cos \varphi = \cos \pm \dfrac{\pi}{4} = 0{,}707 = \dfrac{R}{Z}$, on déduit $Z = R / \cos \dfrac{\pi}{4} = 8{,}5\ \Omega$, pour les deux valeurs de C.

Ainsi l'intensité efficace I s'écrit $I = \dfrac{U}{Z} = 23{,}6$ mA. Avec $U = 0{,}2$ V.

Pour que la tension instantanée soit en retard sur l'intensité $i(t)$, il faut que φ soit négatif; dans la suite on utilise $C = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ F.

B. 1° Par définition, $P = I \cdot U \cdot \cos\varphi$ avec $I = U/Z$ et $\cos\varphi = R/Z$, il vient :

$$P = \frac{R \cdot U^2}{Z^2} \quad \text{avec} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot \omega - \frac{1}{C \cdot \omega}\right)^2}.$$

Ainsi, pour chaque valeur de R comprise entre 0 et 15 Ω, on peut calculer la puissance consommée dans le circuit :

R en Ω	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P en mW	0	1,07	2	2,64	3,05	3,26	3,31	3,28	3,19

R en Ω	9	10	11	12	13	14	15
P en mW	3,07	2,93	2,8	2,66	2,53	2,4	2,3

Ces résultats permettent de tracer le graphe de $P = f(R)$:

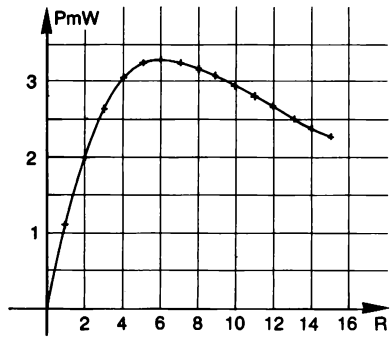


Fig. 4

La fonction passe par un maximum pour $R = 6\ \Omega$: $P_{max} = 3{,}31$ mW.

2° Pour simplifier le calcul on pose $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, X réactance du circuit, alors la puissance s'écrit : $P = \dfrac{R \cdot U^2}{R^2 + X^2}$.

La dérivée de P par rapport à R est $\dfrac{dP}{dR} = \dfrac{U^2(R^2 + X^2) - R \cdot U^2 \cdot 2R}{(R^2 + X^2)^2}$.

La valeur maximale de P correspond à $\dfrac{dP}{dR} = 0$.

Soit $X^2 - R^2 = 0$, donc $X = \pm R$.

Or $\tan\varphi = \dfrac{X}{R}$, ainsi $\tan\varphi = \pm 1$, $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{4}$.

Conclusion : pour un ensemble de valeurs de ω, L, C et U fixé, la puissance maximale consommée est obtenue pour une valeur de R qui provoque un déphasage de $\frac{\pi}{4}$ entre $u(t)$ et $i(t)$.

3° Les expressions précédentes ne sont pas définies pour $X = 0$, ce qui correspond au circuit fonctionnant à la résonance, dans ce cas $Z = R$ et $P = \frac{U^2}{R}$ pour U fixée, la puissance varie comme $1/R$.

OSCILLATIONS FORCÉES RÉSONANCE MÉCANIQUE

20

1. Oscillations forcées

Aspect énergétique. A cause de la dissipation d'énergie par amortissement les oscillations libres d'un système présentent un caractère non permanent; pour entretenir les oscillations il est nécessaire de disposer d'un autre système — *excitateur* — qui compense la perte énergétique : le système ainsi entretenu est un *résonateur.*

Oscillations forcées : on se limite au cas où l'énergie cédée au résonateur ne représente qu'une infime fraction de l'énergie de l'excitateur : **on constate que le résonateur oscille sur la fréquence de l'excitateur.**

Remarques :

1° Si les deux systèmes ont des énergies comparables chacun joue alternativement les rôles d'excitateur et de résonateur : il y a **couplage.**(*)

2° Dès que la fréquence est peu élevée on parle plutôt de *vibrations* que d'oscillations.

2. Résonance

Résonance d'amplitude. Si on fait varier la pulsation de l'excitateur ω on constate que *la réponse du résonateur est déphasée* par rapport à la force excitatrice et que *son amplitude peut varier beaucoup* avec ω.

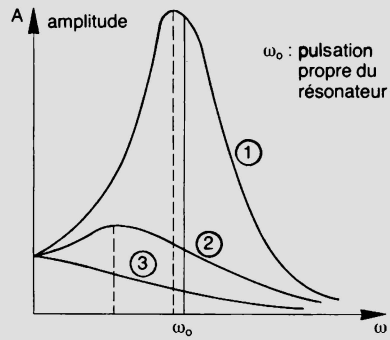


Fig. 1

* Dans ce cas on peut également considérer que les deux systèmes forment un système unique appelé oscillateur multiple.
Plus généralement, si on considère une chaîne d'oscillateurs élémentaires au nombre de n on constate qu'un tel système ne répondra à une force excitatrice avec des amplitudes notables que pour une suite discrète de n pulsations correspondant aux oscillations propres de la chaîne **(résonance);** les oscillateurs élémentaires sont alors *en phase* ou en *opposition de phase* les uns par rapport aux autres. La recherche des modes normaux de vibration et des fréquences propres tend vers une *suite discrète de multiples entiers* (harmoniques) *de la plus petite fréquence* N_1 (fondamentale).

• *Résonateur très peu amorti* (non représenté sur la figure). Il ne vibre pratiquement que si on l'excite à une fréquence quasi-égale à sa fréquence propre.
• *Résonateur peu amorti* (courbe 1) L'amplitude présente un maximum très accentué pour $\omega \leqslant \omega_0$: résonance aiguë.
• *Résonateur amorti* (courbe 2) Le maximum est moins accentué et se produit pour $\omega < \omega_0$: résonance floue.
• *Résonateur très amorti* (courbe 3) l'amplitude décroît constamment.

Remarque : noter la différence avec la résonance d'intensité pour les circuits électriques. L'équivalent électrique de la résonance d'amplitude porterait sur la charge. De même l'équivalent mécanique de la résonance d'intensité porterait sur la vitesse.

Exemples d'oscillateurs.

— L'ensemble caisse-suspension d'une automobile constitue l'oscillateur. S'il y a une succession de cahots, il est soumis à des oscillations forcées, le phénomène de résonance pouvant se produire; une partie de l'énergie des oscillations est absorbé par les amortisseurs.
— Un microphone est un oscillateur électromécanique. L'onde sonore impose des vibrations forcées à une membrane souple sur laquelle est fixée une bobine placée dans l'entrefer d'un aimant. Le déplacement de la bobine dans le champ magnétique produit un courant induit dans l'enroulement.
— Le haut-parleur repose sur le même principe : ce sont les forces électromagnétiques créées par le courant dans la bobine qui provoquent les oscillations forcées du système bobine-membrane.

EXERCICES

1. Une voiture dont la masse totale (passagers inclus) est $M = 750$ kg se déplace sur une route horizontale légèrement ondulée, à vitesse constante v. La déformation z de la route est liée à l'abscisse x par la relation : $z = a \sin \frac{2\pi \cdot x}{\lambda}$ avec $\lambda = 12{,}5$ m. Sachant que la voiture s'affaisse de $d = 0{,}012$ m lorsque le conducteur de masse $m = 75$ kg s'installe sur son siège, quelle est la vitesse critique de la voiture? (On assimilera la suspension à un ressort unique de raideur k que l'on calculera.)

Réponse : la vitesse critique sera atteinte à la résonance, c'est-à-dire lorsque la fréquence des chaos sera la même que la fréquence propre des oscillations de la voiture $\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}\right)$. On aura :

$$m \cdot g = k \cdot d \text{ et } \omega_0 = 2\pi \cdot N_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g}{M \cdot d}} \Rightarrow T_0 = \frac{1}{N_0} = 2\pi \sqrt{\frac{M \cdot d}{m \cdot g}} \simeq 0{,}7 \text{ s.}$$

Ce temps devra correspondre au temps séparant deux passages sur deux bosses consécutives de la route :

$$T = \frac{\lambda}{v} \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T_0} \simeq 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 65 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

2. Le plancher d'un atelier fléchit de 0,01 m sous le poids d'une machine. Le centre de masse du rotor de la machine n'étant pas exactement sur l'axe de rotation. Calculer la vitesse critique de rotation à laquelle on risque d'avoir des oscillations importantes du plancher. On assimilera le plancher à une poutre rigide suspendue par des ressorts équivalents à un ressort unique de raideur k.

Réponse : la pulsation propre du plancher vaut $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ avec $m \cdot g = k \cdot d$ si d est le fléchissement sous le poids (on néglige la masse du plancher devant celle de la machine); soit :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{d}} = 31{,}3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5 \text{ Hz}.$$

A la résonance, la machine tournera à la même fréquence de 5 Hz donc de 5 tours par seconde, soit 300 tours par minute. (Il y aura possibilité de résonance, à un degré moindre, sur des multiples de cette vitesse.)

3. Établir un tableau des grandeurs analogues pour un oscillateur électrique et un oscillateur mécanique.
Réponse :

Grandeurs mécaniques	Grandeurs électriques
masse m ou moment d'inertie $\mathcal{J}$	inductance L
raideur k ou constante de torsion C	inverse de la capacité $\frac{1}{C}$
coefficient d'amortissement h	résistance R
abscisse x ou angle repère α	charge du condensateur q
vitesse v ou vitesse angulaire α'	intensité i
force excitatrice f ou moment	tension appliquée u
énergie cinétique $\frac{1}{2} m \cdot v^2$ ou $\frac{1}{2} J \cdot \alpha'^2$	énergie magnétique $\frac{1}{2} L \cdot i^2$
énergie potentielle $\frac{1}{2} k \cdot x^2$ ou $\frac{1}{2} C \cdot \alpha^2$	énergie électrique $\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

PROBLÈMES

1. Un oscillateur harmonique non amorti est constitué par un système masse ponctuelle-ressort. Soumis à une force supplémentaire $F = F_0 \cos(\omega \cdot t)$, il effectue des oscillations forcées sur la pulsation ω :

$$x = X_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi).$$

Étudier la phase et l'amplitude de la réponse en fonction de ω. On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, pulsation propre de l'oscillateur.

2. Une masse m est accrochée à l'une des extrémités d'un ressort de masse négligeable et de raideur k dont l'autre extrémité subit une force sinusoïdale $F = F_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$. La masse est soumise, de plus, à une force de frottement proportionnelle à la vitesse de la forme $f = -h \dfrac{dx}{dt}$, x étant l'abscisse de la masse m par rapport à la position d'équilibre.
La masse m prend un régime de vibrations forcées de la forme $x = x_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi)$.

1° Établir l'équation différentielle du mouvement.

2° En utilisant la construction de Fresnel, calculer x_m et φ.

3. Le dispositif étudié comprend un ressort de raideur k dont l'axe est horizontal et un solide de masse M lié à l'extrémité B du ressort. Il se déplace sans frottement sur un plan horizontal. L'extrémité A du ressort peut être déplacée le long du plan.

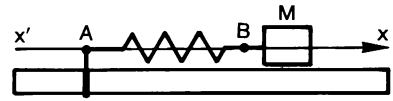


Fig. 2

1° A restant fixe, la masse M est écartée de sa position d'équilibre et lachée sans vitesse initiale.
a) Établir l'équation différentielle qui permet d'exprimer l'abscisse x de la masse par rapport à la position d'équilibre.
b) Quelle est la pulsation propre ω_0 de cet oscillateur?
c) Quelle est son énergie mécanique lorsque l'amplitude de x est X_m?
Application numérique : $X_m = 1$ cm; $k = 10^3$ N·m^{-1}.

2° On appelle x_A l'abscisse de A par rapport à sa position initiale; on impose à A un mouvement tel que $x_A = X_A \cdot \cos(\omega \cdot t)$ avec $X_A > 0$ et $\omega \neq \omega_0$.
On admettra que l'on a alors $x = X \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ avec $X > 0$.
a) Exprimer X en fonction de X_A, ω et ω_0, et calculer φ. On distinguera les deux cas $\omega > \omega_0$ et $\omega < \omega_0$.
b) Donner l'allure de la courbe représentant les variations de X en fonction de ω. Que risque-t-il de se produire lorsque ω est voisin de ω_0?

1. L'équation régissant les oscillations forcées est :

$$m \cdot x'' + k \cdot x = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \leftrightarrow x'' + \omega_0^2 \cdot x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega \cdot t).$$

Cherchons une solution de la forme $x = X_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$. On trouve :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) X_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega \cdot t),$$

soit $\varphi = 0$ ou π et $X_m = \dfrac{\dfrac{F_0}{m}}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$.

Algébriquement on pourra écrire en posant $X_0 = \dfrac{F_0}{k}$:

$$x = \frac{X_0 \cdot \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega \cdot t).$$

Si $\omega < \omega_0$: la réponse est en phase; le ressort impose sa loi.
Si $\omega > \omega_0$: la réponse est en opposition de phase; l'inertie impose sa loi.
Si $\omega = \omega_0$: la réponse est infinie! Cela provient du fait que l'on a négligé l'amortissement ce qui est légitime loin de la résonance mais absurde à la résonance.

2. **1°** Selon une direction $x'Ox$ orientée vers le bas, l'origine O est choisi dans la position d'équilibre de la masse m.
Soit x_0 l'allongement du ressort à l'équilibre; on a $k \cdot x_0 = m \cdot g$.
Soit x_1 l'allongement du ressort provoqué par la force F, on a : $x_1 = -\dfrac{F}{k}$.
Pour une position x de la masse m on peut écrire la valeur X de l'allongement du ressort : $X = x + x_0 + x_1$.
La masse m subit à chaque instant les forces suivantes :
— son poids $\vec{p}$: $p = m \cdot g$;
— la force de frottement $f = -h \cdot x'$;
— la force de rappel du ressort : $f_1 = -k \cdot X$.
Par application de la relation fondamentale de la dynamique, en projection selon l'axe $x'Ox$ il vient :

$$m \cdot g - k \cdot X - h \cdot x' = m \cdot a$$
$$m \cdot g - k(x + x_0 + x_1) - h \cdot x' = m \cdot x''$$
$$m \cdot g - k \cdot x - k \cdot x_0 - k \cdot x_1 - h \cdot x' = m \cdot x''.$$

En simplifiant et en ordonnant, on trouve l'équation différentielle :

$$m \cdot x'' + h \cdot x' + k \cdot x = F_m \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

2° $x = x_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi)$

donc $x' = -\omega \cdot x_m \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$ ou $x' = x_m \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$

et $x'' = -\omega^2 \cdot x_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) = -\omega^2 \cdot x.$

En remplaçant dans l'équation différentielle :

$$-m \cdot \omega^2 \cdot x + h \cdot x_m \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + k \cdot x = F_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$(k - m \cdot \omega^2) x_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi) + h \cdot x_m \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = F_m \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

On en déduit la construction de Fresnel :

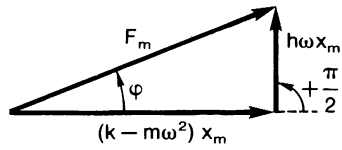


Fig. 3

Ce diagramme permet de calculer :

$$F_m^2 = \left[(k - m \cdot \omega^2)^2 + h^2 \cdot \omega^2\right] x_m^2$$

d'où $$x_m = \frac{F_m}{\sqrt{(k - m \cdot \omega^2)^2 + h^2 \cdot \omega^2}}$$

et $$\tan \varphi = \frac{h}{k - m \cdot \omega^2}.$$

3. 1° *a*) La masse M est soumise à 3 forces :
— son poids $\vec{p} = m \cdot \vec{g}$;
— l'action $\vec{R}$ du plan sur la masse (telle que $\vec{P} = -\vec{R}$);
— la force de rappel du ressort $\vec{F}$ avec $F = -k \cdot x$.
La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{p} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

En projection sur l'axe $x'x$, il vient : $-k \cdot x = m \cdot x''$.
L'équation différentielle de l'oscillateur est $m \cdot x'' + k \cdot x = 0$.
b) La solution de cette équation est de la forme $x = x_m \cdot \cos \cdot (\omega \cdot t + \varphi)$.
On en déduit : $x'' = -\omega^2 \cdot x_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$
$x'' = -\omega^2 \cdot x$.

La pulsation propre de l'oscillateur est donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

c) A chaque instant l'énergie mécanique est :

$$E_m = E_c + E_p \qquad = \text{constante}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2 = \text{constante}.$$

A l'instant où l'amplitude X_m est atteinte, l'énergie cinétique est alors nulle, donc $E_m = \frac{1}{2} k \cdot X_m^2$.
Application numérique : $E_m = 5 \cdot 10^{-2}$ J.

2° *a*) A chaque instant l'allongement du ressort est $X = (x - x_A)$.
L'équation différentielle ci-dessus devient

$$-k \cdot X = m \cdot x''$$
$$-k(x - x_A) = m \cdot x''$$

d'où $$m \cdot x'' + k \cdot x = k \cdot x_A.$$

Sachant que $x = X \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ et $x_A = X_A \cos(\omega \cdot t)$, il vient :

$$-m \cdot \omega^2 \cdot X \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) + k \cdot X \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = k \cdot X_A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\Rightarrow X \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \frac{k \cdot X_A}{k - m \cdot \omega^2} \cos(\omega \cdot t).$$

1^er cas : si $\omega < \omega_0$ alors $k - m \cdot \omega^2 > 0$

donc $$X = \frac{k \cdot X_A}{k - m \cdot \omega^2}$$

et $$\varphi = 0.$$

Le point A et la masse M vibrent en phase.

2^e cas : si $\omega > \omega_0$ alors $k - m \cdot \omega^2 < 0$.

On écrit : $X \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = -\frac{k \cdot X_A}{m \cdot \omega^2 - k} \cos(\omega \cdot t)$

donc $$X = \frac{k \cdot X_A}{m \cdot \omega^2 - k}$$

et $$\varphi = \pi.$$

Le point A et la masse M vibrent en opposition de phase.

b) En écrivant $X = \dfrac{X_A}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ si $\omega < \omega$.

Il est immédiat de vérifier que la fonction $X(\omega)$ est croissante pour $\omega < \omega_0$.

De même en écrivant $X = \dfrac{X_A}{\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}$, on peut vérifier que la fonction $X_{(\omega)}$ est décroissante pour $\omega > \omega_0$.

Au voisinage de $\omega = \omega_0$, la valeur de X deviendrait très supérieure à X_A. Ceci risque de provoquer la rupture du ressort, ou pour le moins de dépasser sa limite d'élasticité.

Remarque : pour $\omega = \omega_0$ les frottements ne sont plus négligeables, c'est ce qui fait que la valeur X n'est pas infinie comme le laisserait supposer la fonction $X(\omega_0)$.

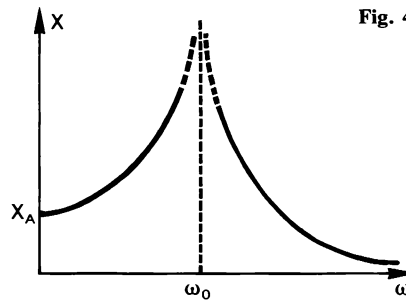


Fig. 4

ASPECT CORPUSCULAIRE DE LA LUMIÈRE EFFET PHOTOÉLECTRIQUE

21

1. EFFET PHOTOÉLECTRIQUE

Les métaux placés dans un faisceau de lumière de longueur d'onde λ suffisamment courte émettent des électrons (Hertz, 1887) : c'est l'effet photoélectrique. Il est utilisé dans la *cellule photoélectrique* — ampoule contenant une cathode émettrice d'électrons et une anode qui les capte (**fig. 1**) — où l'on a fait le vide.

• *Le tracé des caractéristiques courant-tension* de ce dipôle (**fig. 2**), montre que, pour annuler le courant photoélectrique, il faut appliquer une *contre-tension* V_0. Sa mesure permet de connaître l'énergie cinétique des électrons émis :

$$E_c = e \cdot V_0.$$

• *D'autre part,* l'émission d'électrons par un métal ne se produit que si la lumière incidente a une *fréquence supérieure à un seuil* ν_0 (ou $\lambda < \lambda_0$: seuil photoélectrique), et il existe une relation expérimentale entre E_c et ν (**fig. 3**) :

$$E_c = h(\nu - \nu_0)$$

où $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s,

constante de Planck.

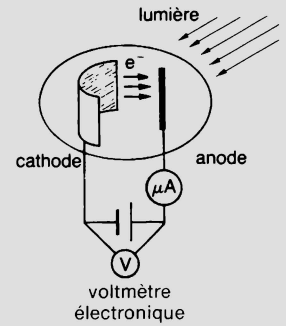


Fig. 1

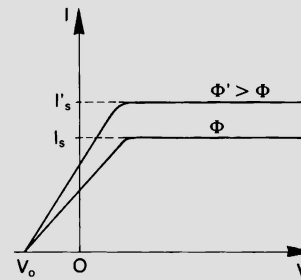


Fig. 2

2. INTERPRÉTATION

Einstein (1905) **a interprété ces expériences et celles de Millikan :**
La lumière transporte de l'énergie par paquets discontinus, chaque quantum (ou **photon**) possédant l'énergie $h \cdot \nu$. Lorsqu'un électron est émis, c'est qu'un photon a agi sur le métal en lui cédant son **énergie $h \cdot \nu$ qui sert à extraire l'électron du métal** (W_0, travail d'extraction), **et à lui communiquer l'énergie cinétique** E_c :

$$h \cdot \nu = E_c + W_0, \quad (W_0 = h \cdot \nu_0).$$

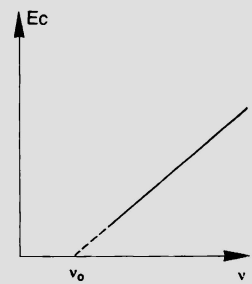


Fig. 3

3. CARACTÉRISTIQUES DU PHOTON

C'est une particule de masse nulle :

$$m = 0.$$

Sa vitesse est celle de la lumière dans le milieu où il se déplace :

$$v = c.$$

Son énergie est $E = \sqrt{p^2 \cdot c^2 + m^2 \cdot c^4}$ (purement « cinétique ») :

$$E = \hbar \cdot \nu = \hbar \cdot \omega \quad \left(h = \frac{h}{2\pi}\right).$$

EXERCICES

1. Calculer en joule et en eV le travail d'extraction pour une cellule au césium (seuil $\lambda_0 = 0{,}66$ μm) et une cellule au sodium ($\lambda_0 = 0{,}52$ μm).
Réponse : césium : $W_0 = 3 \cdot 10^{-19}$ J = 1,9 eV; sodium : $W_0 = 3{,}8 \cdot 10^{-19}$ J = 2,4 eV.

2. Une cellule photoélectrique est éclairée par une lumière de longueur d'onde $\lambda = 0{,}55$ μm. Que se passe-t-il si la cellule est au sodium? Au césium? Calculer la vitesse maximale des électrons émis.
Réponse : pour le sodium il ne se passe rien : $\lambda > \lambda_0$; pour le césium il y a émission d'électrons d'énergie cinétique :

$$E_c = h(\nu - \nu_0) = h \cdot c \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) = 6 \cdot 10^{-20} \text{ J},$$

et de vitesse $v = \sqrt{\dfrac{2E_c}{m}} = 3{,}66 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Vérifier $\dfrac{v}{c} \ll 1$.

3. On éclaire une cellule photoélectrique à vide dont la cathode est recouverte de césium (seuil : 0,66 μm) avec une lampe à vapeur de sodium qui émet des radiations de longueur d'onde $\lambda = 0{,}59$ μm.
Montrer comment la théorie corpusculaire de la lumière permet d'interpréter l'existence du seuil photoélectrique et justifier le choix de la lampe à vapeur de sodium pour éclairer la cellule. Faire le schéma du montage électrique de cette cellule, en précisant le signe de la d.d.p. appliquée aux électrodes, et le sens du courant.
Réponse : cf. cours.

4. On dispose d'une cellule photoélectrique avec cathode de potassium, dont le seuil photoélectrique est $\lambda_0 = 0{,}55$ μm. On l'éclaire avec une lumière de longueur d'onde $\lambda = 0{,}45$ μm. Quelle tension faut-il appliquer, et dans quel sens pour annuler le courant?
Réponse : soit U la différence de potentiel entre l'anode (−) et la cathode (+). L'énergie cinétique des électrons émis n'est pas suffisante pour leur permettre d'atteindre l'anode : $Ec < e \cdot U$, soit

$$U > \frac{h}{e}(\nu - \nu_0) = \frac{h \cdot c}{e}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) \Rightarrow U > 0{,}50 \text{ V}.$$

1. Une cellule photoélectrique au césium est éclairée au moyen d'une source lumineuse monochromatique de longueur d'onde λ dans le vide. La caractéristique de la cellule $i = f(U_{AC})$ donnant l'intensité du courant de cellule en fonction de la tension U_{AC} entre l'anode et la cathode de cette cellule, est donnée par la courbe **(fig. 4)**.

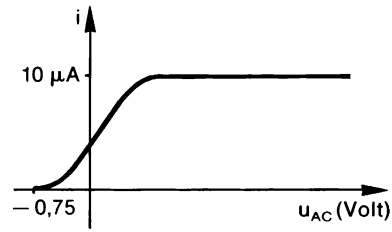


Fig. 4

1° Définir le potentiel d'arrêt de cette cellule U_0 et en déduire l'énergie cinétique maximale des électrons émis par la cathode.

2° Sachant que le travail d'extraction d'un électron de la cathode de césium ci-dessus est

$$W_0 = 2{,}05 \text{ eV},$$

en déduire la longueur d'onde de la radiation utilisée ainsi que le seuil photoélectrique de cette cellule.

2. On dispose d'une cellule photoélectrique à vide dont la cathode est recouverte d'une couche de césium. Pour extraire un électron du césium, il faut, au minimum, une énergie de 1,9 eV. La cathode est éclairée par un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}56$ μm.

1° Quelle est la vitesse maximale que peut avoir un électron à la sortie de la cathode?

2° Pour augmenter cette vitesse d'expulsion, faut-il changer l'intensité du faisceau lumineux, sa longueur d'onde restant constante? Ou bien faut-il changer sa longueur d'onde? Quelle est l'influence de l'intensité du faisceau lumineux à longueur d'onde constante? Justifier la réponse.

3. La cathode d'une cellule photoélectrique recouverte de potassium (seuil : 0,55 μm) est frappée par un rayonnement de longueur d'onde inconnue λ. On constate que pour annuler le courant photoélectrique dans la cellule, il faut établir entre les électrodes une différence de potentiel de 5 V.

1° Faire un schéma du montage utilisé en indiquant clairement le signe de la différence de potentiel établie.

2° Interpréter le phénomène et calculer la longueur d'onde λ.

4. On dispose d'une cellule photoémissive avec cathode au césium dont le seuil photoélectrique est $\lambda_0 = 0{,}66$ μm.
On éclaire successivement cette cellule avec des lumières de longueur d'onde $\lambda_1 = 0{,}60$ μm, $\lambda_2 = 0{,}68$ μm, et avec une lumière formée des deux précédentes. Préciser, pour chacune des expériences, s'il y a émission d'électrons, et si oui, avec quelle vitesse maximale les électrons sortent de la cathode.

5. Millikan a réalisé l'expérience dont le schéma de principe est le suivant :

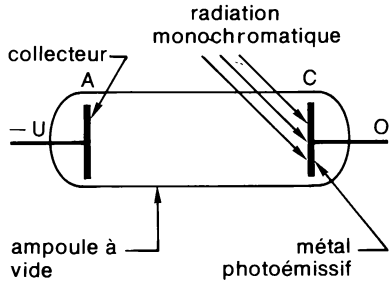


Fig. 5

On applique une différence de potentiel U entre les électrodes de cette cellule photoélectrique, puis, on la place dans un faisceau de lumière de fréquence ν. Il apparaît alors un courant photoélectrique, qui s'annule lorsque $U = U_0$: U_0 est le potentiel d'arrêt de la cellule.

1° Une série de mesures de potentiels d'arrêt U_0 en fonction de la fréquence de la lumière incidente a conduit aux résultats suivants :

ν (Hz)	$8{,}20 \cdot 10^{14}$	$7{,}41 \cdot 10^{14}$	$6{,}88 \cdot 10^{14}$
U_0 (V)	1,48	1,15	0,93

ν (Hz)	$6{,}15 \cdot 10^{14}$	$5{,}49 \cdot 10^{14}$	$5{,}18 \cdot 10^{14}$
U_0 (V)	0,62	0,36	0,24

Tracer la courbe représentative des variations de U_0 en fonction de ν. (Échelle : 1 cm pour 10^{14} Hz, 1 cm pour 0,1 V.)

2° Soit E_c l'énergie cinétique des électrons émis. Exprimer E_c en fonction de U_0. Montrer que l'étude de la courbe du **1°** permet d'établir la relation :

$$E_c = h(\nu - \nu_0),$$

h étant une constante (constante de Planck) que l'on calculera.

3° Déduire du graphe la fréquence limite ν_0 de la radiation, au-dessous de laquelle l'extraction est impossible. Quelle est la longueur d'onde λ_0 correspondante?

4° Quelle est l'énergie minimale nécessaire à l'extraction d'un électron de la cathode (travail d'extraction)? Exprimez votre résultat en J et eV. Expliquez votre raisonnement.

6. Une cellule photoélectrique au césium est éclairée successivement par différentes radiations monochromatiques. On mesure les énergies cinétiques maximales des électrons émis par la cathode, puis on trace la courbe C représentant les variations de cette énergie en fonction de la fréquence des radiations incidentes.

1° Rappeler l'expression de l'énergie cinétique maximale $E_{c\,max}$ des électrons émis par la cathode en fonction de la fréquence ν et de la fréquence ν_0 du seuil photoélectrique.

2° Montrer que l'expression de cette énergie est bien en accord avec la courbe obtenue et, d'après le graphique, calculer la constante de Planck (SI).

3° Pour quelle valeur de la fréquence l'énergie cinétique des électrons est-elle nulle? En déduire le travail d'extraction (en eV) d'un électron du césium.

4° Sachant que la fréquence seuil du lithium est de l'ordre de $5{,}9 \cdot 10^{14}$ Hz, tracer, sur le même graphe, la courbe C′ représentant l'énergie cinétique maximale des électrons émis par une cellule photoélectrique au lithium en fonction de la fréquence de la radiation monochromatique incidente.

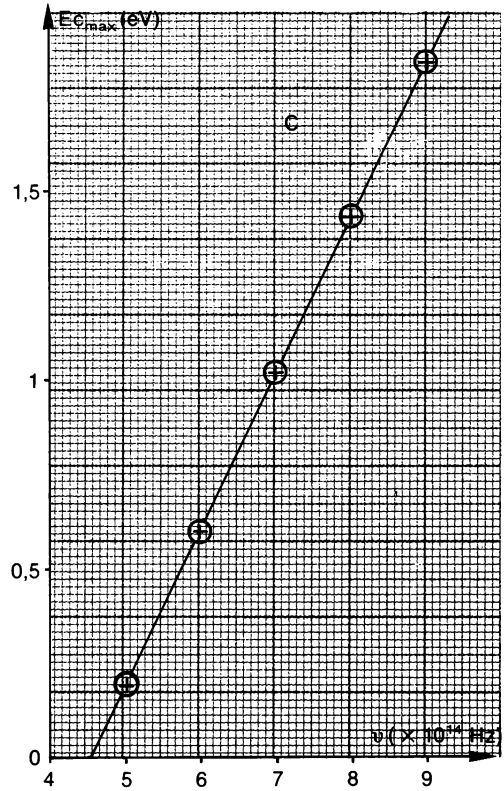


Fig. 6

7. On donne les seuils photoélectriques de quelques métaux : césium : 0,66 μm, sodium : 0,52 μm, zinc : 0,37 μm, cuivre : 0,29 μm. On veut fabriquer une cellule photoélectrique sensible à la radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}579$ μm.

1° Quelle est l'énergie d'un photon de cette radiation? (en J et eV).

2° Quel métal peut-on choisir pour la cathode parmi les métaux ci-dessus? Quelle sera alors la vitesse maximale d'un électron à la sortie de la cathode?

3° On applique à cette cellule une tension suffisante pour obtenir le courant de saturation, I_s. Soit P la puissance rayonnante transportée par la radiation monochromatique reçue par la cathode. Calculer le rapport du nombre d'électrons émis au nombre de photons incidents, appelé rendement de la cathode.

Application numérique : $P = 3{,}7 \cdot 10^{-4}$ W; $I_s = 1{,}7 \cdot 10^{-6}$ A.

8. Une cellule au césium (seuil : 0,66 μm) est éclairée par une radiation de longueur d'onde $\lambda = 0{,}60$ μm. Entre la cathode et l'anode, on établit une d.d.p. réglable et un microampèremètre permet de mesurer l'intensité du courant débité.

1° La différence de potentiel entre anode et cathode est $V_A - V_C = 2$ V. Calculer la vitesse maximale d'un électron à son arrivée sur l'anode.

2° Quelle serait la valeur absolue minimale de la différence de potentiel négative $V_A - V_C$ à appliquer pour que le courant s'annule?

3° L'intensité du courant dans le circuit est $4 \cdot 10^{-9}$ A.
Pour augmenter l'intensité du courant dans le circuit, on utilise en fait plusieurs anodes successives portées à des potentiels croissants. En effet, lorsque l'anode est frappée par un électron émis par la cathode, il se produit une émission secondaire de k électrons qui sont attirés par l'anode suivante où le même effet se reproduit. En utilisant ainsi 5 anodes successives, on obtient un courant d'intensité $4{,}1 \cdot 10^{-6}$ A.
Déterminer le facteur multiplicateur k.

SOLUTIONS

1. 1° Le potentiel d'arrêt de la cellule est égal à la tension U_{AC} qu'il faut appliquer entre l'anode et la cathode émissive pour annuler le courant photoélectrique, $i = 0$:

$$U_{AC} = -0{,}75 \text{ V}.$$

L'énergie cinétique maximale des électrons émis est :

$$E_c = |e \cdot U_{AC}| = 1{,}20 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 0{,}75 \text{ eV}.$$

2° L'énergie $E = h \cdot \nu$ des photons utilisés sert à extraire les électrons de la cathode (W_0) et à leur communiquer l'énergie cinétique E_c :

$$E = h \cdot \nu = E_c + W_0 = 2{,}80 \text{ eV}.$$

Sa longueur d'onde est λ, telle que :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c \cdot h}{E} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 6{,}63 \cdot 0^{-34}}{2{,}8 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 0{,}44 \text{ µm} \quad \text{(bleu)}.$$

2. 1° Chaque photon incident possède l'énergie $h \cdot \nu$:

$$h \cdot \nu = h \cdot c/\lambda = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 0{,}56 \cdot 10^{-6} = 3{,}55 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Si l'interaction photon-électron est efficace, cette énergie est utilisée pour extraire l'électron du réseau métallique ($E_0 = 1{,}9$ eV) et pour lui communiquer la vitesse v. Son énergie cinétique est alors : $E_c = h \cdot \nu - E_0 = 5{,}1 \cdot 10^{-20}$ J

et sa vitesse est :

$$v = \sqrt{2E_c/m} \simeq 3{,}4 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ car } \frac{v}{c} \ll 1.$$

2° Si l'*on utilise des radiations de longueur d'onde inférieure* à la précédente, donc d'énergie supérieure, E_0 restant le même (caractéristique du césium), l'énergie cinétique des électrons émis augmente, donc leur vitesse.
Si, à longueur d'onde constante, l'intensité du faisceau lumineux augmente, le nombre de photons incidents augmente également, et ainsi, le nombre d'électrons émis : l'intensité du courant de photoélectrons augmente, sans que leur énergie cinétique initiale change.

3. 1°

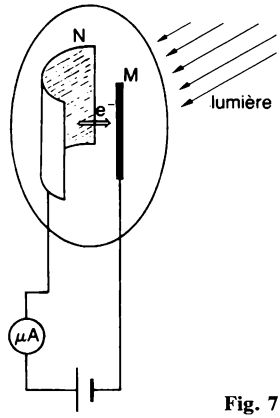


Fig. 7

2° Les électrons, émis par effet photoélectrique, ont, au maximum, l'énergie cinétique $E_N = h \cdot c/\lambda - h \cdot c/\lambda_0$, λ_0 étant le seuil photoélectrique du potassium. Si le courant dans la cellule est nul, c'est que les électrons perdent leur énergie cinétique avant d'arriver en *M*. Le travail de la force électrique qui les freine est :

$$W = q(U_N - U_M), \text{ pour le déplacement de N à M.}$$

Le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire :

$$W = E_M - E_N = -E_N \Rightarrow q(U_N - U_M) = -E_N = -h \cdot c/\lambda + h \cdot c/\lambda_0$$

d'où $$\lambda = \frac{h \cdot c}{h \cdot c/\lambda_0 - q(U_N - U_M)} = 1{,}71 \cdot 10^{-7} \text{ m} \simeq 0{,}17 \text{ μm (U. V.).}$$

4. Les électrons seront émis par effet photoélectrique si la longueur d'onde de la lumière incidente est inférieure au seuil λ_0. C'est le cas pour λ_1 non pour λ_2. Pour la lumière composée, seuls les photons de longueur d'onde λ_1 produiront l'effet.
L'énergie $h\nu$ d'un photon incident est utilisée pour extraire un électron ($h \cdot \nu_0$) et lui communiquer l'énergie cinétique E_c :

$$h \cdot \nu = h \cdot \nu_0 + E_c \Rightarrow E_c = h(\nu - \nu_0) = h \cdot c \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda \cdot \lambda_0} = 3 \cdot 10^{-20} \text{ J} \simeq 0{,}19 \text{ eV.}$$

La vitesse d'un électron est alors :

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \simeq 2{,}6 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

5. 1°

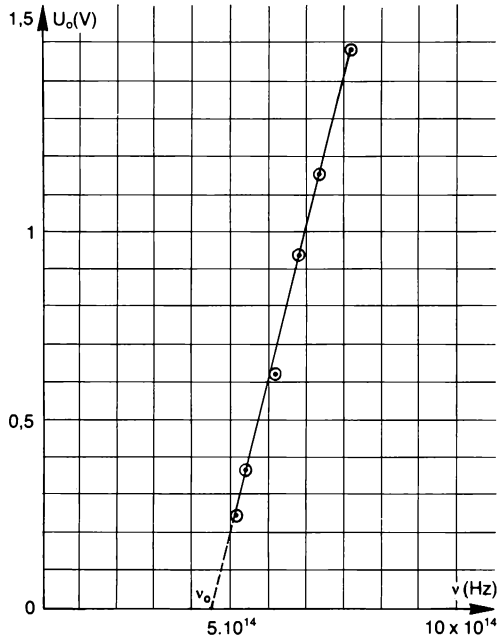


Fig. 8

2° Lorsqu'il quitte la cathode, l'électron a l'énergie cinétique E_c. Il se trouve alors dans un champ électrique et subit une force qui ralentit son mouvement. Si sa vitesse s'annule et s'inverse, juste avant qu'il atteigne l'anode, sa variation d'énergie cinétique est $-E_c$. Le travail de la force qui s'exerce sur lui est $W = q \cdot U_0$.
Le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire :

$$\Delta E_c = -E_c = q \cdot U_0 \Rightarrow E_c = -q \cdot U_0 \quad (q < 0).$$

L'équation de la courbe est :

$$U_0 = 4{,}11 \cdot 10^{-15} (\nu - \nu_0) \text{ V}.$$

Comme :

$$E_c = -q \cdot U_0 \Rightarrow E_c = 6{,}58 \cdot 10^{-34} (\nu - \nu_0) \text{ J}.$$

La constante de Planck, h, obtenue à partir de cette expérience, est donc :

$$h = 6{,}58 \cdot 19^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

3° L'énergie cinétique étant une grandeur positive, U_0 ne peut être négatif. A la limite, la valeur $U_0 = 0$ correspond à une lumière de fréquence $\nu_0 = 4{,}6 \cdot 10^{14}$ Hz. Pour les fréquences inférieures, l'extraction est impossible. La longueur d'onde correspondante est $\lambda_0 = c/\nu_0 = 0{,}47$ µm.

4° Le travail d'extraction est $W_0 = h \cdot \nu_0 = 3 \cdot 10^{-19}$ J $= 1{,}89$ eV.

6. 1° $E_c = h(\nu - \nu_0)$. **(1)**

2° L'équation de la courbe peut s'écrire : $E_c = h \cdot \nu - h \cdot \nu_0$. h représente le taux d'accroissement de la droite :

$$h = \frac{\Delta E_c}{\Delta \nu} = \frac{1{,}84 - 1{,}19}{9 - 5} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{10^{14}} = 6{,}6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

3° $\nu = \nu_0$ pour $E_c = 0$; soit, d'après l'équation (1), au point $(9 \cdot 10^{14},\ 1{,}84)$:

$$\nu_0 = \nu - \frac{E_c}{h} = 9 \cdot 10^{14} - \frac{1{,}84 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{6{,}6 \cdot 10^{-34}} = 4{,}54 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

Le travail d'extraction d'un électron du césium est :

$$W = h \cdot \nu_0 = 3 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1{,}87 \text{ eV}.$$

4° Pour le lithium, on a :

$$E_c = h(\nu - \nu_0') \quad \text{avec} \quad \nu_0' = 5{,}9 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

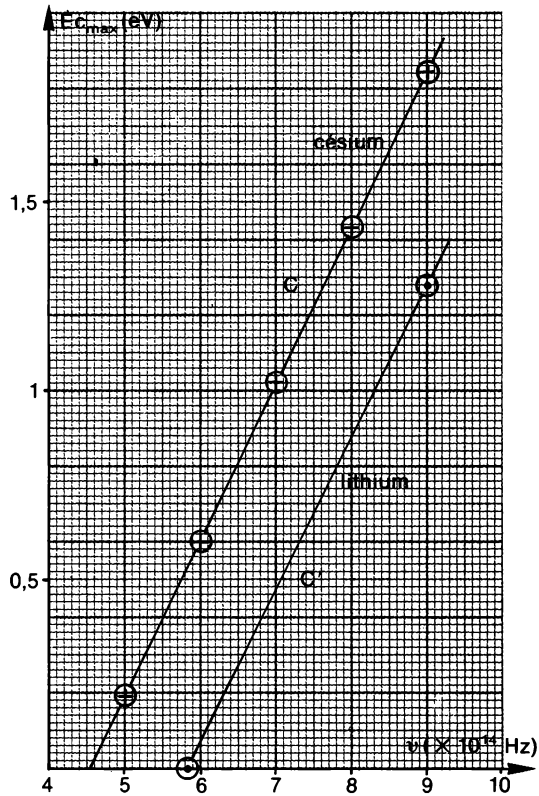


Fig. 9

On trace donc la courbe d'équation :

$$E_c = 6{,}6 \cdot 10^{-34} \nu - 3{,}9 \cdot 10^{-19} \text{ (J)}$$

soit

$$E_c = 0{,}412 \cdot 10^{-14} \nu - 2{,}43 \text{ (eV)}.$$

N. B. : Le taux d'accroissement de cette droite étant égal à $h(\Delta E_c / \Delta \nu)$, elle est parallèle à la précédente; il suffit de calculer les coordonnées d'un de ses points pour la construire (par exemple : $5{,}9 \cdot 10^{14}$; 0).

7. **1°** $E = h \cdot \nu = h \cdot c/\lambda = 3{,}43 \cdot 10^{-19}$ J $= 2{,}14$ eV.

2° On pourra obtenir l'effet photoélectrique avec les métaux de seuil de longueur d'onde supérieur à λ : le césium seul convient.
La vitesse maximale d'un électron à la sortie de la cathode est :
$v = \sqrt{2E_c/m} = \sqrt{2h(\nu - \nu_0)/m} = \sqrt{2h \cdot c(\lambda_0 - \lambda)/\lambda \cdot \lambda_0 \cdot m} = 4{,}2 \cdot 10^5$ m·s^{-1}.

3° Si n électrons traversent le microampèremètre pendant le temps Δt, l'intensité affichée est : $I_s = n|q|/\Delta t$. Chaque photon possédant l'énergie $h \cdot \nu$, si n' photons tombent sur la cathode pendant le même temps, la puissance reçue est $P = n' \cdot h \cdot \nu/\Delta t$. On a alors :

$$\frac{n}{n'} = \frac{I_s \cdot \Delta t \cdot h \cdot \nu}{|q| P \cdot \Delta t} = \frac{I_s \cdot h \cdot c}{|q| P \cdot \lambda} = 9{,}8 \cdot 10^{-3}.$$

Un photon sur 100 interagit efficacement avec un électron de la cathode.

8. **1°** L'énergie cinétique d'un électron qui quitte la cathode est :

$$E_c = h(\nu - \nu_0) = h \cdot c \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda \cdot \lambda_0}.$$

La variation d'énergie cinétique au cours du déplacement de C en A est :

$$\Delta E_c = q(V_C - V_A).$$

L'énergie cinétique E'_c de l'électron arrivant en A est donc :

$$E'_c = q(V_C - V_A) + h \cdot c \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda \cdot \lambda_0} = 3{,}5 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (2{,}19 \text{ eV})$$

et sa vitesse est : $v = \sqrt{2E'_c/m} = 8{,}8 \cdot 10^5$ m·s^{-1}.

2° Lorsque la différence de potentiel entre anode et cathode est égale au potentiel d'arrêt, la vitesse des électrons s'annule juste avant qu'ils n'atteignent l'anode, et leur énergie cinétique aussi : $E'_c = 0$. Alors :

$$E_c = q(V_A - V_C) \Rightarrow V_A - V_C = \frac{h \cdot c}{q} \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda \cdot \lambda_0} = -0{,}188 \text{ V}.$$

L'intensité du courant est $I = n|q|/\Delta t$; le nombre d'électrons traversant l'ampèremètre en 1 s est :

$$n = I/|q| = 2{,}5 \cdot 10^{10} \text{ électrons par seconde.}$$

L'intensité du courant étant $4{,}1 \cdot 10^{-6}$ A, le nombre d'électrons qui circulent dans l'ampèremètre en 1 s est $N = 2{,}5 \cdot 10^{13}$ électrons.

Si n électrons sont émis, après la première anode, il y en a $n \cdot k$ qui circulent, après la seconde, $n \cdot k^2$... et, après la cinquième, $n \cdot k^5$. Donc :

$$N = n \cdot k^5 \rightarrow k^5 = N/n = 10^3 \rightarrow k = 10^{3/5} \simeq 4.$$

NIVEAUX D'ÉNERGIE D'UN ATOME

22

Quand un corps est convenablement excité (par chauffage, décharge électrique dans un tube contenant ce corps, bombardement par un faisceau d'électrons...), **il peut émettre de la lumière.** Réciproquement, placé devant une source de lumière blanche, le corps **absorbera les radiations** sélectivement, ou intégralement dans le cas du corps noir. On peut déterminer les longueurs d'onde des radiations émises à l'aide d'un spectromètre.

• *Les spectres d'émission ou d'absorption des atomes sont composés de raies.*
• *Le spectre d'un atome est caractéristique de son espèce chimique :* il permet de l'identifier au sein d'un mélange.

N. Bohr a donné une interprétation des spectres atomiques (1913) : *L'atome peut prendre un certain nombre d'états stationnaires, et possède, dans un état donné, une énergie bien déterminée.*

Lorsque l'atome passe du niveau d'énergie E_n au niveau E_p ($E_n > E_p$), l'*énergie perdue par l'atome est émise sous forme de radiation* dont la fréquence est ν :

$$E_n - E_p = h \cdot \nu \quad (h : \text{constante de Planck} = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}).$$

De même, l'*absorption d'un photon d'énergie $h\nu$ fait passer l'atome de niveau E_p au niveau E_n.*

L'état de plus faible énergie de l'atome s'appelle état fondamental ($n = 1$).

L'énergie qu'il faut fournir pour arracher à l'atome l'électron le plus faiblement lié est l'*énergie de première ionisation* E_i. Cette énergie intervient également dans l'étude de l'oxydo-réduction, échange d'électrons entre atomes ou édifices d'atomes.

Atome d'hydrogène : Si l'on choisit (arbitrairement) l'origine de l'énergie de l'atome ($E = 0$) lorsqu'il est ionisé ($n \to \infty$, électron infiniment loin du noyau), le $n^{\text{ième}}$ niveau d'énergie de l'atome (n entier) est :

$$E_n = -E_i/n^2 \qquad E_i = 2{,}175 \cdot 10^{-18}\ \text{J} = 13{,}6\ \text{eV}.$$

Gamme de longueurs d'onde des raies d'émission atomique :

λ (Å)	10^7	7 500	4 000	100	0,01
$h\nu$ (eV)	$1{,}24 \cdot 10^{-3}$	1,66	3,10	124	$1{,}24 \cdot 10^{6}$
Domaine	infrarouge	visible	ultra-violet		rayonx X

1. Avec des électrons de quelle énergie cinétique doit-on bombarder des atomes d'hydrogène pour les porter à un état d'excitation de 10,2 eV au-dessus de l'état fondamental? Quelle est la vitesse de ces électrons?

Réponse : les électrons doivent avoir une énergie cinétique au moins égale à 10,2 eV.

$$\text{Si } \frac{v}{c} \ll 1 : E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \Rightarrow v_{\min} = 1{,}9 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \frac{v_{\min}}{c} = 6{,}3 \cdot 10^{-3}.$$

Pour une énergie cinétique donnée, la vitesse obtenue par les relations classiques est toujours supérieure à celle obtenue par la mécanique relativiste. On vérifie donc à posteriori notre hypothèse $v_{\min} \ll c$.

2. Dans quelles régions du spectre électromagnétique l'atome d'hydrogène émet-il des radiations quand il passe de l'état ionisé à l'état d'énergie du premier, deuxième ou troisième niveau?

Réponse : $\lambda = \dfrac{h \cdot c}{E_\infty - E_n}$; $n = 1, 2, 3$ avec $E_\infty = 0$ et $E_n = -\dfrac{13{,}6}{n^2}$ eV.

Numériquement :

$$\lambda_1 = 914 \text{ Å (U. V.)}; \quad \lambda_2 = 3\,650 \text{ Å (U. V.)}; \quad \lambda_3 = 8\,230 \text{ Å (I. R.)}.$$

3. Lorsque des photons sont projetés sur des atomes de sodium, il peut y avoir ionisation des atomes en ions sodium. L'énergie nécessaire à l'ionisation d'une mole de sodium est 495 kJ mol^{-1}. Calculer en eV l'énergie d'ionisation d'un atome de sodium. Calculer la fréquence, puis la longueur d'onde de la lumière incidente.

Réponse : l'énergie nécessaire à l'ionisation de l'atome de sodium est :

$$E_i = \frac{495 \cdot 10^3}{\mathcal{N}} = 8{,}22 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 5{,}14 \text{ eV}.$$

Les photons doivent avoir au moins cette énergie et une fréquence au moins égale à :

$$\frac{E_i}{h} = 1{,}24 \cdot 10^{15} \text{ Hz},$$

et : $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = 2\,420$ Å (U. V.).

4. Des électrons accélérés par une tension de 3 V, pénètrent dans une enceinte contenant de la vapeur de césium. On observe une émission de radiations. Déterminer les longueurs d'onde des trois radiations associées aux niveaux d'énergie de l'atome de césium que l'on a représenté sur la figure. Y a-t-il une radiation visible?

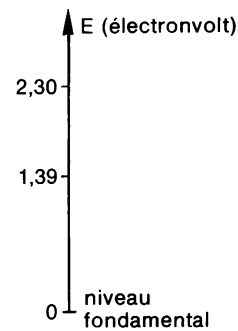


Fig. 1

Les radiations d'énergie $E < 3$ eV peuvent être émises :
soit pour $E_1 = 2{,}3$ eV, $\Rightarrow$ $\lambda_1 = h \cdot c / E_1 = 0{,}54$ μm (visible);
pour $E_2 = 1{,}38$ eV $\Rightarrow$ $\lambda_2 = 0{,}9$ μm (I. R.);
pour $E_3 = 2{,}3 - 1{,}38 = 1{,}12$ eV $\Rightarrow$ $\lambda_3 = 1{,}1$ μm (I. R.).

PROBLÈMES

1. Les énergies des différents niveaux de l'atome d'hydrogène, exprimées en eV sont données par la formule :

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}.$$

a) Calculer les énergies correspondant à $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = \infty$ et représenter le diagramme des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

b) Quelle est l'énergie minimale que l'on doit fournir à un atome d'hydrogène pour qu'il passe d'un état fondamental à un état excité? La transcrire sur le diagramme.

c) Cette énergie est apportée à l'atome par une radiation lumineuse monochromatique. Calculer sa longueur d'onde. A quel domaine du spectre appartient cette radiation?

2. On communique à un atome d'hydrogène au repos, dans son état fondamental, toute l'énergie d'un photon de longueur d'onde $\lambda = 600$ Å. Peut-on ainsi ioniser l'atome et dans ce cas, quelle est la vitesse acquise par l'électron arraché? (On suppose que le noyau reste au repos.)

3. *a*) Sur le diagramme représenté par la figure, figurent quelques-uns des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène. A quoi correspond le niveau d'énergie $E = 0$ eV?

b) Représenter par des flèches sur ce diagramme les transitions électroniques de la série de Balmer, qui se produisent lors du retour au niveau 2 d'un électron (modèle de Bohr). Indiquer la variation d'énergie de l'atome correspondant à chacune de ces transitions. Quelle est la plus petite longueur d'onde des radiations de cette série? Cette radiation est-elle visible?

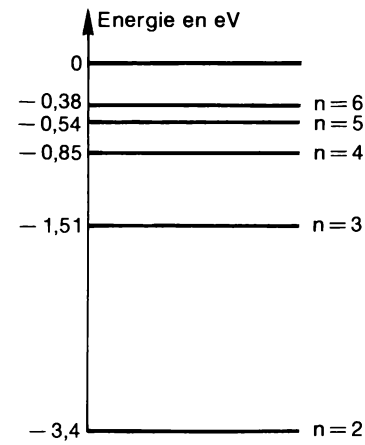


Fig. 2

c) On éclaire une cellule photoélectrique au potassium (travail d'extraction 2,26 eV) avec l'ensemble des radiations de la série de Balmer. A quelles transitions correspondent les radiations susceptibles d'extraire un électron du métal? Quelle sera l'énergie cinétique d'un électron émis de la cathode sous l'effet d'une radiation correspondant à la transition

$$n = 5 \rightarrow n = 2 ?$$

4. Dans une ampoule bien vidée d'air, on introduit de la vapeur de mercure. L'ampoule contient une cathode émissive chauffée C, une grille G_1 destinée à régler le débit d'électrons émis par la cathode, une grille accélératrice G_2, et une plaque collectrice P, portée a un potentiel de -1 V par rapport à G_2.

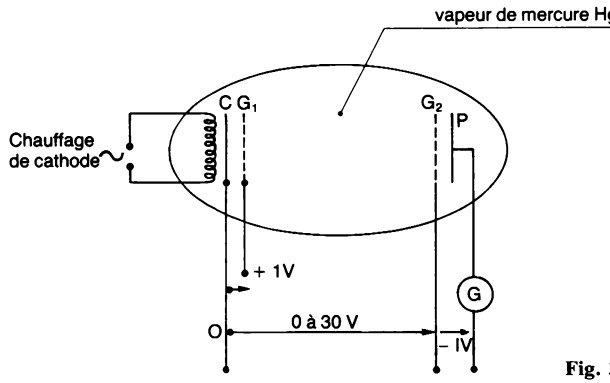


Fig. 3

1° Dans quelles zones les électrons seront-ils accélérés? décélérés? A quelle condition observe-t-on un courant dans le galvanomètre?

2° Les électrons émis rencontrent des atomes de mercure avec lesquels ils peuvent échanger ou non de l'énergie. Lorsque l'on fait croître la différence de potentiel $V_{G_2} - V_C$, l'intensité I du courant d'électrons atteignant la plaque P, est mesurée par le galvanomètre. On voit que I augmente, puis diminue, augmente à nouveau... Interpréter la courbe obtenue.

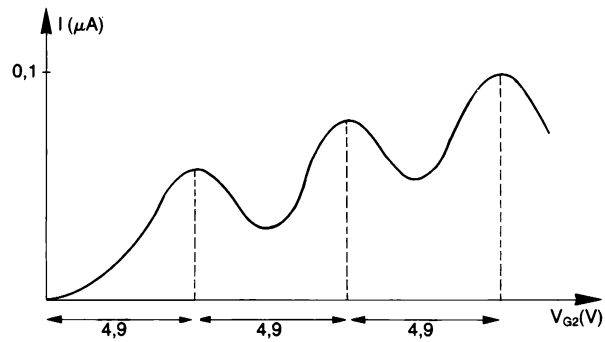


Fig. 4

3° A partir de la différence de potentiel correspondant au premier pic d'intensité, la vapeur de mercure émet une radiation de longueur d'onde $\lambda = 2537$ Å. Calculer l'énergie d'un photon émis par le mercure, et comparer sa valeur à celle d'un électron incident. Interpréter le phénomène.

5. La résolution de cet exercice nécessite un choix parmi les données numériques ci-dessous.
Structure électronique de l'atome de mercure :
80 électrons : 2/8/18/32/18/2.
On considère les niveaux suivants de l'atome de mercure :

$-10{,}4$ eV (niveau fondamental); $-5{,}54$ eV; $-3{,}73$ eV; $-1{,}56$ eV.

1° On bombarde de la vapeur de mercure avec des photons d'énergie $W = 6$ eV. Des électrons peuvent-ils être extraits du mercure par effet photoélectrique? Quelle est la longueur d'onde des photons considérés et celle du seuil photoélectrique du mercure?

2° On bombarde la vapeur de mercure avec des électrons d'énergie cinétique 6 eV. Lors d'une collision atome-électron, quelle est l'énergie absorbée par l'atome? Quelle est l'énergie cinétique de l'électron après la collision? Quelle est sa vitesse?

6. Nous étudions ici le **modèle** de l'atome d'hydrogène, proposé par **Bohr.** On considère l'atome d'hydrogène comme constitué d'un proton de charge $+e$, de masse M, et d'un électron $(-e, m)$. Les deux particules sont supposées ponctuelles, et l'électron décrit un cercle de rayon r autour du proton, avec une vitesse de norme constante v. Les forces exercées l'une sur l'autre par les deux particules sont opposées, et de norme

$$\|\vec{f}\| = \left| k \frac{(e)\cdot(-e)}{r^2} \right| \quad \text{(loi de Coulomb).}$$

Le système proton-électron possède une énergie mécanique : somme de l'énergie potentielle électrique qui ne dépend que de la distance des deux particules et de l'énergie cinétique de l'électron.

1° Mécanique classique

a) Donner les caractéristiques à l'instant t des forces qui s'exercent sur les particules. Faire un schéma.

b) Décrire le mouvement de l'électron autour du centre du proton supposé fixe et donner l'expression de son énergie cinétique en fonction de k, e et r.

c) Soit $\mathrm{d}r$ une variation algébrique de r, assez petite pour que la force électrique $\vec{f}$ qui s'exerce sur l'électron puisse être considérée comme constante entre r et $r + \mathrm{d}r$. Donner l'expression du travail $\mathrm{d}W$ de $\vec{f}$ pour ce déplacement, et en déduire la variation ΔE_p de l'énergie potentielle du système.
En considérant que l'énergie potentielle est nulle lorsque l'électron est infiniment éloigné du noyau (choix arbitraire), montrer que, lorsqu'il est à la distance r du proton, elle est égale à $E_p(r) = -k \dfrac{e^2}{r}$.

d) Quelle est alors l'expression de l'énergie totale du système (en fonction de k, e, r)?

2° Quantification

L'atome peut prendre toute une série d'états stationnaires, correspondant à des niveaux d'énergie distincts, l'énergie du niveau n étant : $E_n = -A/n^2$.

a) Montrer que le modèle de Bohr permet d'attribuer à l'électron une trajectoire circulaire, dont le rayon dépend du niveau d'énergie de l'atome.

b) Des mesures ont permis de déterminer l'énergie qu'il faut fournir pour ioniser l'atome à partir de son état fondamental : $E_i = 13{,}6$ eV.
Calculer le terme A.

c) Calculer les rayons des orbites correspondant aux niveaux 1, 2, 3, 4, 5 et les énergies des 5 premiers niveaux.

d) Au cours de l'évolution de l'électron sur une orbite « permise », l'atome ne rayonne pas d'énergie. Lorsque l'électron passe de l'orbite de rang n à l'orbite de rang p, l'atome émet un photon d'énergie $h\nu = E_n - E_p$.
Calculer les fréquences, puis les longueurs d'onde des photons émis lors des transitions des niveaux 2, 3, 4, 5 au niveau 1.
Ces raies constituent la série de Lyman. A quel domaine du spectre appartiennent ces radiations?

e) Chercher la valeur des nombres n et p pour que la radiation émise soit visible. On donnera un seul exemple numérique.
Données : $k = 9 \cdot 10^9$ S. I.; 1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s (constante de Planck).

RÉPONSES

1. *a*) $E_1 = -13{,}6$ eV;
$E_2 = -3{,}4$ eV;
$E_3 = -1{,}51$ eV.

b) C'est l'énergie E qu'il faut fournir à l'atome pour qu'il passe de l'état 1 à l'état 2 :

$$E = E_2 - E_1 = 10{,}2 \text{ eV}.$$

c) $E = h \cdot \nu = h \cdot c/\lambda$

d'où

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10{,}2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 0{,}12 \text{ µm, (U. V.).}$$

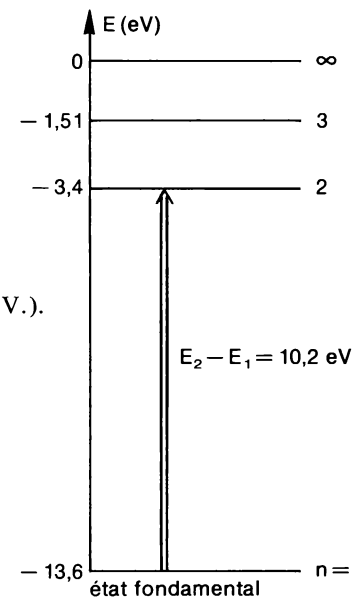


Fig. 5

2. L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène est $E_i = 13{,}6$ eV. L'énergie d'un photon incident est $E = h \cdot c/\lambda = 3{,}31 \cdot 10^{-18}$ J $= 20{,}7$ eV, supérieur à 13,6 eV.
Le photon étant absorbé, si l'atome reste pratiquement au repos, l'électron quitte l'atome avec l'énergie cinétique $E_c = E - E_i = 7{,}1$ eV $= (1/2)m \cdot v^2$ si $v \ll c$; sa vitesse est :

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \simeq 1{,}6 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \left(\text{et } \frac{v}{c} < 6 \cdot 10^{-3}\right).$$

3. *a*) Le niveau d'énergie $E = 0$ eV correspond à l'énergie nécessaire pour ioniser l'atome.

b) Lors de la transition du niveau 3 au niveau 2, $t_{3/2}$, la variation d'énergie de l'atome est :

$$\Delta E_{3/2} = E_2 - E_3 = -1{,}89 \text{ eV}.$$

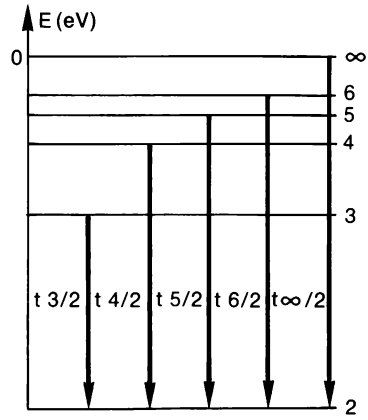


Fig. 6

L'atome émet un photon d'énergie $E = -\Delta E_{3/2} = h \cdot \nu = \dfrac{h \cdot c}{\lambda}$.

D'où $$\lambda = \frac{h \cdot c}{-\Delta E_{3/2}}.$$

Pour les autres transitions, on obtient :

$$\Delta E_{4/2} = -2{,}55 \text{ eV}; \quad \Delta E_{5/2} = -2{,}86 \text{ eV};$$
$$\Delta E_{6/2} = -3{,}02 \text{ eV}; \quad \Delta E_{\infty/2} = -3{,}4 \text{ eV}.$$

La longueur d'onde de la radiation émise étant inversement proportionnelle à la variation d'énergie de l'atome, $\lambda_{\min}$ correspond à $|\Delta E_{\max}|$, soit :

$$\lambda_{\min} = \frac{h \cdot c}{-\Delta E_{\infty/2}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3{,}4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 0{,}37 \text{ µm}$$

(limite visible U. V.).

d) Si $\Delta E > 2{,}26$ eV, il peut y avoir extraction d'un électron du métal, soit après les transitions $t_{4/2}$, $t_{5/2}$... Par exemple, pour $t_{5/2}$ l'énergie cinétique de l'électron émis est :

$$E_{c_{5/2}} = |\Delta E| - 2{,}26 = 0{,}6 \text{ eV}.$$

4. 1° Les électrons sont accélérés entre C et G_1, G_1 et G_2, freinés entre G_2 et P.

Le courant dans le galvanomètre est dû aux électrons qui atteignent la plaque P. Il doivent avoir, lorsqu'ils traversent G_2, une énergie au moins égale à 1 eV.

2° Si l'énergie des électrons accélérés entre C et G_2 est inférieure à 4,9 eV, les chocs des électrons sur les atomes de mercure sont élastiques. La masse d'un atome de mercure étant beaucoup plus grande que celle d'un électron, l'échange d'énergie est presque nulle : les électrons rebondissent sur les atomes de mercure, et gardent pratiquement leur énergie cinétique.

Certains d'entre eux peuvent traverser la grille G_2, et venir frapper la plaque P, créant ainsi un courant décelé au galvanomètre. Lorsque la différence de potentiel $V_{G_2} - V_C$ augmente, l'énergie cinétique des électrons augmente. Lorsqu'elle atteint 4,9 V, les chocs entre électrons et atomes de mercure peuvent se faire sans qu'il y ait conservation de l'énergie cinétique globale. Au cours de ce phénomène, l'énergie des électrons est transférée aux atomes de mercure. Cette perte d'énergie ne permet plus aux électrons de vaincre le potentiel antagoniste $V_P - V_{G_2}$. Le courant indiqué par le galvanomètre diminue. En augmentant à nouveau la différence de potentiel entre C et G_2, les électrons peuvent avoir une énergie égale à 4,9 eV avant d'atteindre G_2, perdre une partie de leur énergie dans leurs chocs avec des atomes de mercure, mais être accélérés à nouveau avant d'atteindre G_2. Le courant détecté augmente...

3° $E = h \cdot \nu = h \cdot c/\lambda = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 2\,537 \cdot 10^{-10} = 7{,}84 \cdot 10^{-19}$ J $\simeq 4{,}9$ eV. Cette valeur est égale à l'énergie d'un électron incident. Ainsi, lorsque les électrons acquièrent une énergie de 4,9 eV, ils peuvent la transférer aux atomes de mercure qui se trouvent alors dans un état excité. En revenant à l'état initial, ces atomes libèrent des photons d'énergie égale à celle des électrons incidents, et de longueur d'onde λ.

5. 1° L'atome de mercure étant dans l'état fondamental, il faut lui fournir une énergie au moins égale à 10,4 eV pour lui arracher un électron : des photons d'énergie $E = 6$ eV ne produiront pas l'effet photoélectrique. Leur longueur d'onde est :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{h \cdot c}{E} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \simeq 2{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ m } (2\,072 \text{ Å}).$$

Pour l'atome dont l'énergie d'ionisation est $E_i = 10{,}4$ eV, le seuil photoélectrique est $\lambda_0 = \dfrac{h \cdot c}{E_i} = 1\,195$ Å.

2° L'atome heurté par un électron peut passer du niveau d'énergie fondamental au niveau 1 en absorbant l'énergie $E_1 = 10{,}4 - 5{,}54 = 4{,}86$ eV. L'énergie de l'électron après la collision est : $E' = 6 - 4{,}86 = 1{,}14$ eV et sa vitesse :

$$v = \sqrt{\frac{2E'}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}14 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9 \cdot 10^{-31}}} = 6{,}37 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

6. 1° *a*) Voir figure. Le poids des particules est négligeable devant les forces électrostatiques.

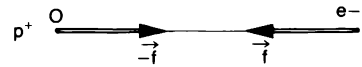


Fig. 7

b) L'électron a un mouvement circulaire uniforme : l'accélération est radiale, valant $\frac{v^2}{r}$ et on aura :

$$f = m\frac{v^2}{r} = K\frac{e^2}{r^2} \Rightarrow m \cdot v^2 = K\frac{e^2}{r}.$$

Son énergie cinétique est : $E_c = (1/2)\, m \cdot v^2 = (1/2)\, k\frac{e^2}{r}$.

c) Le travail infinitésimal de $\vec{f}$ pour le déplacement $\vec{dr}$ est :

$$dW = \vec{f} \cdot \vec{dr} = \bar{f} \cdot \overline{dr}.$$

La variation de l'énergie potentielle est l'opposé du travail des forces intérieures au système noyau-électron :

$$dE_p = -dW = -\bar{f} \cdot \overline{dr}.$$

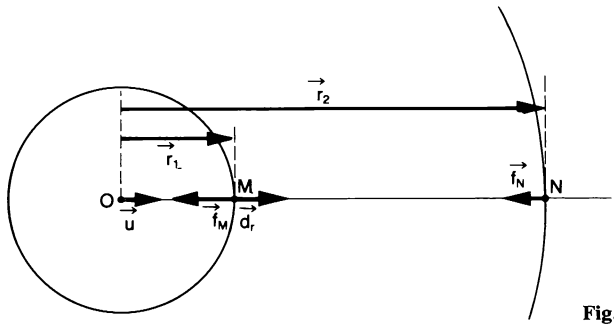


Fig. 8

La variation d'énergie potentielle du système lorsque l'électron passe de $M(\overline{OM} = r_1)$ à $N(\overline{ON} = r_2)$ est :

$$E_p(N) - E_p(M) = \int_{r_1}^{r_2} (-\bar{f})\,\overline{dr} = \int_{r_1}^{r_2} k\frac{e^2}{r^2}\,dr = \left[-k\frac{e^2}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = k \cdot e^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Lorsque ON $\to \infty$, en posant $E_{p(r \to \infty)} = 0$, on obtient :

$$E_p(r) = -k\frac{e^2}{r}.$$

d) L'énergie totale est la somme des énergies cinétique et potentielle :

$$E = E_c + E_p = -(1/2)\, k\frac{e^2}{r}.$$

2° *a*) L'énergie de l'atome est $E = -(1/2)\, k\frac{e^2}{r}$, et ne dépend que de la distance électron-proton. L'énergie du $n^{\text{ième}}$ niveau étant $E_n = -A/n^2$, on peut supposer que l'électron décrit une orbite de rayon r_n, telle que :

$$r_n = \frac{k \cdot e^2}{2\,A}\, n^2.$$

b) Dans l'état fondamental, l'électron est sur l'orbite la plus proche du proton, ce qui correspond au 1er niveau d'énergie, d'énergie $E_1 = -A$.

Lorsque l'atome est ionisé, l'électron est infiniment loin du proton, et l'énergie du système est nulle. Pour ioniser l'atome, il faut donc lui fournir l'énergie *(énergie d'ionisation)* :

$$E_i = -E_1 = A, \quad \text{d'où} \quad A = 13{,}6 \text{ eV} = 2{,}17 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$$

c) En appliquant la formule trouvée au *a*), on obtient :

niveau	rayon (Å)	énergie (eV)
1	0,53	13,6
2	2,12	3,4
3	4,77	1,51
4	8,48	0,85
5	13,25	0,54

d) On applique la relation : $h \cdot \nu_{2-1} = E_2 - E_1$, d'où le tableau :

transition	ν (Hz)	λ (Å)
$2 \rightarrow 1$	$2{,}46 \cdot 10^{15}$	~1 220
$3 \rightarrow 1$	$2{,}92 \cdot 10^{15}$	~1 030
$4 \rightarrow 1$	$3{,}08 \cdot 10^{15}$	~975
$5 \rightarrow 1$	$3{,}15 \cdot 10^{15}$	~952

Toutes ces raies appartiennent au domaine des ultra-violets.

e) Par exemple, la transition de niveau 3 à 2 permet l'émission d'une raie de longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E_3 - E_2} \simeq 6\,580 \text{ Å (rouge)}.$$

NOYAU ATOMIQUE DÉTECTION DE PARTICULES

23

On appelle *nucléide* tout ensemble d'atomes ayant le *même noyau.*
On appelle *élément chimique* tout ensemble d'atomes possédant le *même nombre de protons* (donc, d'électrons) : les noyaux d'isotopes d'un même élément ne diffèrent que par leur nombre de neutrons N.

1. Représentation d'un nucléide

Nombre de nucléons (protons + neutrons) A
Nombre de protons (ou de charges) Z $\times$

2. Énergie de liaison

La masse d'un noyau, m, n'est pas égale à la somme des masses de ses nucléons, m' :

$$m' = m + \Delta m.$$

Lors de la formation du noyau à partir de ses nucléons, l'énergie $\Delta m \cdot c^2$ a été transformée en énergie de liaison du noyau E_l :

$$E_l = \left[(Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n) - m \right] \cdot c^2.$$

L'*énergie de liaison par nucléon* est : $\Delta E = \dfrac{\Delta m \cdot c^2}{A}$.

Pour les noyaux stables $\Delta E \simeq 8$ MeV par nucléon.
Condition de stabilité d'un noyau :

$$N \simeq Z \quad \text{pour} \quad Z \leqslant 30, \quad N > Z \quad \text{pour} \quad Z > 30.$$

La mesure précise des masses se fait au spectrographe de masse.
Unité de masse atomique :

$$1 \text{ u.} = \frac{10^{-3}}{\mathcal{N}} \text{ kg} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 931{,}5 \text{ MeV}/c^2.$$

3. Modèle du noyau

Son volume est sphérique, de rayon $R = 1{,}2 \cdot 10^{-15} \, A^{1/3}$ (m).
Il possède des *niveaux d'énergie discrets,* et peut *émettre des rayons* γ (photons) lors du passage d'un état excité à un état plus stable; noter l'analogie avec le spectre d'énergie d'un atome (qui concerne les électrons) mais à une échelle bien différente : les photons émis ont ici une énergie beaucoup plus grande.

4. Détection des particules

Au cours de réactions nucléaires les noyaux peuvent se transformer en d'autres noyaux et émettre des particules. Celles-ci peuvent impressionner une plaque photographique, illuminer un écran fluorescent (spinthariscope), ou ioniser un gaz (compteur Geiger-Muller). Leurs trajectoires, modifiées par l'action de champs électrique ou magnétique, et observées (chambre de Wilson, chambre à bulles) permettent de les identifier (détermination de leur masse et de leur charge).

1. Soit les nucléides suivants : ${}^{14}_{7}X$; ${}^{16}_{8}X$; ${}^{31}_{15}X$; ${}^{32}_{15}X$; ${}^{32}_{16}X$.

1° Quelle est la signification des nombres indiqués?

2° Deux nucléides représentent des isotopes d'un même élément. Lesquels? Justifier la réponse.

3° Montrer que l'étude des couches électroniques des atomes correspondants permet de constater qu'on peut les classer en deux familles, appartenant chacune à la même colonne de la classification périodique des éléments.

Réponse : 1° Voir le cours.

2° C'est l'élément n° 15 : ${}^{31}_{15}X$ et ${}^{32}_{15}X$ (phosphore), car les noyaux ont même nombre de protons, donc, les atomes ont même nombre d'électrons.

3° ${}^{14}_{7}X$: $1\,s^2, 2\,s^2, 2\,p^3$; ${}^{16}_{8}X$: $1\,s^2, 2\,s^2, 2\,p^4$; ${}^{31}_{15}X$: $1\,s^2, 2\,s^2, 2\,p^6, 3\,s^2, 3\,p^3$; de même pour ${}^{32}_{15}X$; ${}^{32}_{16}X$: $1\,s^2, 2\,s^2, 2\,p^6, 3\,s^2, 3\,p^4$.

Les premier, troisième et quatrième nucléides ont 5 électrons « périphériques ».

Les deuxième et cinquième, ont 6 électrons « périphériques ». Ils constituent deux familles, apparaissant dans la classification périodique des éléments à la 5e colonne (azote, phosphore) et à la 6e colonne (oxygène, soufre).

2. La masse d'un noyau d'uranium 235 ($Z = 92$) est 235,149 u.; celle d'un proton et d'un neutron sont respectivement 1,007 3 et 1,008 7 u. En déduire l'énergie de liaison par nucléon (en MeV).

Réponse : la somme des masses des nucléons vaut 236,916 u.
Δm est égal à 1,767 u. et $\Delta E = 7{,}0$ MeV.

3. Le polonium ${}^{210}_{84}Po$ est un noyau radioactif qui donne par désintégration une particule α et un noyau stable de plomb Pb. Écrire l'équation de désintégration.

Quelle est, en MeV, l'énergie libérée par la désintégration d'un noyau de polonium? On prendra :

$$m\,(\mathrm{Po}) = 210{,}048\,2 \text{ u}; \quad m\,(\mathrm{Pb}) = 206{,}038\,5 \text{ u};$$
$$m(\alpha) = 4{,}001\,5 \text{ u}.$$

Réponse : ${}^{210}_{84}Po \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{206}_{82}Pb$

$$\Delta m = m_{Po} - (m_\alpha + m_{Pb}) = 8{,}200 \cdot 10^{-3}\ u = 7{,}638\ \mathrm{MeV}/c^2.$$

L'énergie libérée est : $\Delta E = 7{,}638$ MeV.

4. La fission de l'uranium 235 s'effectue avec une perte relative de masse de 1 %. Quelle est la puissance d'une pile qui consomme 1 g d'uranium par jour?

Réponse : pour 1 g d'uranium

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 9 \cdot 10^{11} \text{ J} \Rightarrow p = \frac{\Delta E}{\Delta t} = 10{,}4 \text{ MW}.$$

1. On bombarde des noyaux de lithium $^{7}_{3}\mathrm{Li}$ par des protons. Les produits de la réaction sont deux particules α d'égale énergie. La masse de $^{7}_{3}\mathrm{Li}$ est 7,016 0 u., celle de $^{1}_{1}\mathrm{H}$ est 1,007 3 u. et celle d'une particule α 4,001 5 u. Quelle est l'énergie libérée par cette réaction? (en MeV et en J.)

2. Parmi les nombreuses réactions qui peuvent avoir lieu dans un réacteur nucléaire, on étudie le bilan de la fission suivante :

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + ^{1}_{0}n \rightarrow \ ^{\cdot}_{54}\mathrm{Xe} + ^{95}_{\cdot}\mathrm{Sr} + 2\,^{1}_{0}n.$$

Les deux produits formés sont radioactifs. Les énergies de liaison par nucléon sont respectivement :

7,7 MeV pour l'uranium; 8,4 MeV pour le xénon;
8,7 MeV pour le strontium.

1° Dans le bilan de la réaction remplacer les points par les nombres manquants.

2° Donner l'expression de la masse des différents atomes intervenant dans cette réaction, en fonction de la masse m_p du proton, et de celle m_n du neutron (les masses demandées pourront être exprimées en MeV/c^2).

3° Calculer la variation de masse qui se produit lors de la fission d'un atome d'uranium 235 suivant le bilan précédent, en précisant s'il s'agit d'une augmentation ou d'une diminution (le résultat pourra être exprimé en MeV/c^2).

4° En déduire l'énergie libérée par la fission de 1 mg d'uranium 235; le résultat devra être exprimé en joules.

3. L'énergie rayonnée par le soleil provient de la fusion thermonucléaire de l'hydrogène en hélium suivant la réaction-bilan :

$$4\,^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow \ ^{4}_{2}\mathrm{He} + 2\,^{A}_{Z}e + \text{énergie}.$$

1° Calculer A et Z; indiquer les noms des particules émises.

2° On donne les masses des différents noyaux :

$$^{1}_{1}\mathrm{H} : m = 1{,}007\,28 \text{ u.}; \quad ^{4}_{2}\mathrm{He} : m = 4{,}001\,50 \text{ u.};$$

$$^{0}_{1}e : m = 5{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ u.}$$

Calculer en J et en MeV l'énergie libérée par la fusion de 4 protons en un noyau d'hélium. Sous quelle forme cette énergie est-elle libérée?

4. Le schéma représente un spectrographe de masse.
Le faisceau issu de O est constitué de particules négatives ayant toutes la même charge, la même vitesse en O, mais des masses différentes. Dans l'expérience qui nous intéresse, il s'agit d'ions $^{4}_{17}\mathrm{X}^{-}$ dont on veut déterminer le nombre de masse A.

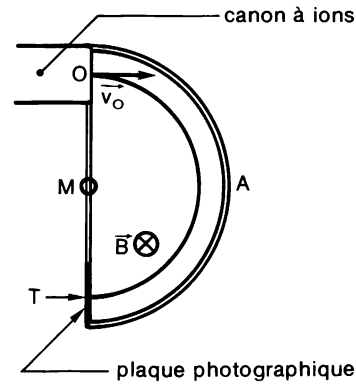


Fig. 1

Dans l'espace semi-cylindrique OAT d'axe (M) règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de la figure, et orienté vers l'arrière de la feuille. L'impact des ions de même masse laisse une trace T sur la plaque photographique.

1° On montre que le mouvement des ions est circulaire et uniforme de vitesse $\vec{v}_0$. Donner, en la justifiant, la relation qui lie le rayon de leur trajectoire R, à leur charge massique, à B et à v_0.

2° On découvre sur la plaque deux traces T_1 et T_2 telles que $OT_1 = 1{,}074$ m et $OT_2 = 1{,}135$ m.
Calculer la masse des ions correspondants. En déduire leur nombre de masse A_1 et A_2.
Données : $B = 0{,}1$ T;
$v_0 = 1{,}47 \cdot 10^5$ m·s^{-1}.

5. Spectrographe de masse. Le bore naturel (élément de numéro atomique $Z = 5$) est un mélange de deux nucléides isotopes : $^{10}_{5}B$ et $^{11}_{5}B$. On se propose de déterminer les proportions n_1 et n_2 de ces deux nucléides constituant le bore naturel.

1° On vaporise du bore dans une chambre d'ionisation. Les atomes s'ionisent en perdant un électron, et on obtient deux sortes d'ions, $^{10}_{5}B^+$ et $^{11}_{5}B^+$, de masses respectives m_1 et m_2. Ces ions pénètrent dans une chambre d'accélération avec une vitesse négligeable. Ils sont soumis dans cette chambre à l'action d'un champ électrique uniforme $\vec{E}$, obtenu en appliquant entre A et C, la différence de potentiel $U = V_A - V_C = 12 \cdot 10^3$ V.

a) Étudier le mouvement d'un ion de masse m, de charge q, dans le champ $\vec{E}$. Montrer que l'on peut appliquer les lois de la mécanique classique et en déduire l'expression littérale en fonction de U, q et m, de la vitesse v de l'ion à sa sortie en O' de la chambre d'accélération. Calculer la vitesse v_1 de l'ion $^{10}_{5}B^+$, sachant que sa masse est environ 10 u.

b) Montrer que les vitesses v_1 et v_2 des deux sortes d'ions en O' sont liées à leurs masses par la relation :

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

2° A leur sortie de la chambre d'accélération, les ions pénètrent dans une chambre de séparation magnétique, où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, normal au plan de la figure, et dirigé vers l'arrière.

a) Déterminer les caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}$ d'un ion de masse m, de charge q, de vitesse initiale v_0. Cette particule décrit un cercle, dont on déterminera le rayon R en fonction de m, q, B et v_0.
Appliquer les résultats obtenus aux ions $^{10}_{5}B^+$ et $^{11}_{5}B^+$: R_1 et R_2 étant les rayons de leurs trajectoires respectives, exprimer R_1 en fonction de m_1, v_1, B et q, ainsi que R_2 en fonction de m_2, v_2, B et q. En déduire une relation entre R_1, R_2, m_1 et m_2.
Application numérique : $B = 0{,}125$ T. Calculer la distance qui sépare sur le plan de trace $Y'Y$ les points d'impact des ions A_1 et A_2.

b) Ces ions sont reçus en A_1 et A_2 dans des collecteurs C_1 et C_2. Ces collecteurs fournissent des courants ioniques dont les intensités i_1 et i_2 sont proportionnelles à n_1 et n_2. On trouve $i_2/i_1 = 4{,}32$. Quelles sont les valeurs de n_1 et n_2 déduites de cette expérience? Calculer alors une valeur approchée de la masse atomique du bore naturel.

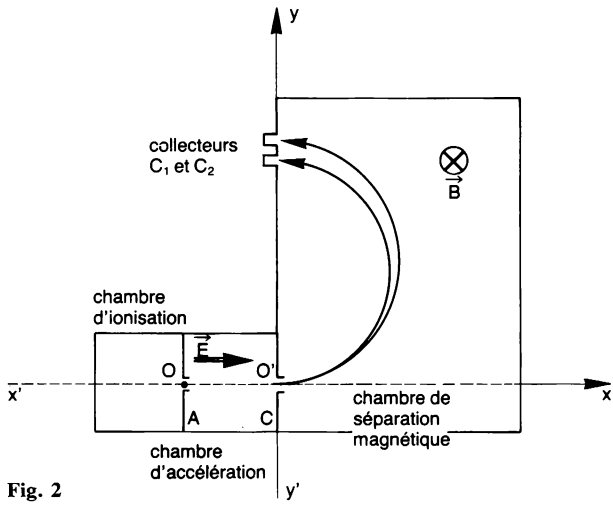


Fig. 2

6. Identification des particules émises par le radium radioactif (Rutheford)

1° Charge des particules.

Au centre d'une sphère de verre de rayon intérieur 8 cm, on a placé 1/100 mg de radium, puis, on a fait le vide dans la sphère. Un petit écran au sulfure de zinc déposé sur la paroi intérieure de la sphère, scintille à chaque fois qu'il reçoit l'une des particules émises. En observant une portion de l'écran avec un microscope, on compte 37 scintillations en 200 s., sur un élément d'aire 0,01 mm^2.

a) Quel est le nombre de particules émises par un gramme de radium, en 1 s?

b) Les particules sont arrêtées par l'une des armatures d'un condensateur de capacité 10 pF, l'autre armature étant reliée au sol. Lorsqu'on y concentre les particules émises par 1 mg de radium, la différence de potentiel entre les deux armatures, initialement nulle, devient 143 V en 30 s.
Déterminer la charge d'une particule et la comparer à la charge élémentaire.

2° Masse et vitesse des particules.

a) Un condensateur plan, d'armatures horizontales, de longueur $l = 3$ cm, d'épaisseur $d = 1$ cm, et dont le centre est situé à 20 cm d'un écran, est soumis à une tension de $5 \cdot 10^4$ V. Les particules émises par le radium horizontalement, vers le centre du condensateur, sont déviées et forment sur l'écran un spot, placé à 5 mm de l'axe du condensateur.
Déterminer l'énergie cinétique des particules.

b) D'autre part, les particules sont déviées par un champ magnétique de 0,4 T, perpendiculaire à leur vitesse initiale, sur une distance l' de 2,5 cm. Sur un écran situé à $D = 36{,}85$ cm de l'entrée des particules dans le champ magnétique, on observe une déflexion magnétique de 1 cm.
Déterminer la quantité de mouvement des particules.
On admettra puis on vérifiera à la fin de l'exercice, que l'on peut appliquer la mécanique classique.

3° Regrouper les résultats obtenus, et déterminer, pour une particule :
l'énergie cinétique (en J et MeV), la quantité de mouvement ($kg \cdot m \cdot s^{-1}$ et MeV/c),
la charge, la masse (kg et MeV/c^2), la vitesse.
Identifier ces particules et donner leur constitution.

1. Masse des particules avant l'interaction-masse des particules formées :

$$-\Delta m = (7{,}016\,0 + 1{,}007\,3) - (4{,}001\,5)\cdot 2 = 1{,}81\cdot 10^{-2}\ \text{u} = 16{,}9\ \text{MeV}/c^2.$$

L'énergie libérée par la réaction est :

$$\Delta E = 16{,}9\ \text{MeV} = 2{,}7\cdot 10^{-12}\ \text{J}.$$

2. **1°** ${}^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{139}_{54}\text{Xe} + {}^{95}_{38}\text{Sr} + 2\,{}^{1}_{0}\text{n}$.

2° *Masses des atomes :* (m_p et m_n étant les masses respectivement d'un proton et d'un neutron)

$$m(\text{U}) = (92m_p + 143m_n) + \frac{E_L(\text{U})}{c^2}$$

avec $E_L(\text{U}) = 235\cdot 7{,}7 = 1\,809{,}5\ \text{MeV}$

d'où : $m(\text{U}) = (92m_p + 143m_n) - 1\,809{,}5\ \text{MeV}/c^2$.

De même, on obtiendrait :

$$m(\text{Xe}) = (54m_p + 85m_n) - 1\,167{,}6\ \text{MeV}/c^2$$

$$m(\text{Sr}) = (38m_p + 57m_n) - 826{,}5\ \text{MeV}/c^2.$$

3° La variation de masse qui se produit au cours de la réaction est :

$$\Delta m = (m_{\text{Xe}} + m_{\text{Sr}} + 2m_n) - (m_{\text{U}} + m_n).$$

Or, il y a conservation du nombre de protons ($\Delta m_p = 0$) et du nombre de nucléons, donc de neutrons ($\Delta m_n = 0$). D'où :

$$\Delta m = (\Delta E_L)/c^2 = -184{,}6\ \text{MeV}/c^2.$$

La masse finale est inférieure à la masse initiale.

4° Lors de la fission d'un atome d'uranium, l'énergie $\Delta E_L = 184{,}6$ MeV ($= 2{,}95\cdot 10^{-11}$ J) est libérée. La masse d'une mole d'uranium 235 étant environ 235 g, celle d'un atome est ($235\cdot 10^{-3}/\mathcal{N}$) kg, l'énergie libérée par 1 mg d'uranium est :

$$\Delta E = 2{,}95\cdot 10^{-11}\cdot 10^{-6}/3{,}9\cdot 10^{-25} = 7{,}57\cdot 10^{7}\ \text{J}.$$

3. **1°** $A = 0$, $Z = 1$. Il s'agit d'un noyau d'hélium ou particule α et de deux positons.

2° La masse initiale (hydrogène) est $m = 4{,}029\,12$ u; la masse finale (hélium et positons) est $m' = 4{,}006\,6$ u. Une masse $m - m'$ a disparu au cours de la fusion. L'énergie E libérée est donc :

$$E = (m - m')\,c^2 = 3{,}96\cdot 10^{-12}\ \text{J} = 24{,}8\ \text{MeV}.$$

Ou, plus simplement : $m - m' = 24{,}8\ \text{MeV}/c^2$ d'où $E = 24{,}8$ MeV.
Cette énergie est libérée sous forme de rayonnement (γ, neutrinos) et d'énergie cinétique des particules émises.

4. **1°** Dès leur entrée dans le champ magnétique $\vec{B}$, les ions subissent la force

$$\vec{F} = q\cdot\vec{v}_0 \wedge \vec{B}.$$

Comme $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de leur déplacement, donc à leur vitesse à chaque instant, et que la norme de la vitesse est constante, on peut écrire :

$$F = q \cdot v_0 \cdot B.$$

Or, lorsqu'un mobile a un mouvement circulaire uniforme de rayon R, c'est qu'il est soumis à une force centripète, de norme constante :

$$F = m \cdot v^2 / R.$$

On a donc :

$$F = q \cdot v_0 \cdot B = m \cdot v^2 / R, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{m \cdot v_0}{q \cdot B} = \left(\frac{m}{q}\right) \cdot \frac{v_0}{B},$$

$\left(\frac{m}{q}\right)$ étant l'inverse de la charge massique.

2° Si R_1 et R_2 sont les rayons des deux trajectoires circulaires, on voit sur la figure que : $OT_1 = 2R_1$ et $OT_2 = 2R_2$. On en déduit :

$$m_1 = \frac{B \cdot q \cdot OT_1}{v_0 \cdot 2} = 5{,}845 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$
$$m_2 = \frac{B \cdot q \cdot OT_2}{v_0 \cdot 2} = 6{,}177 \cdot 10^{-26} \text{ kg}.$$

La masse d'un nucléon étant environ $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, les nombres de masse des ions sont :

$$A_1 = m_1 / 1{,}67 \cdot 10^{-27} = 35$$
$$A_2 = m_2 / 1{,}67 \cdot 10^{-27} = 37.$$

5. 1° *a*) L'ion est soumis à la force électrique $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, de direction parallèle à $\overline{X'X}$. Projetant cette équation sur cet axe, on obtient : $m \cdot \ddot{x} = q \cdot E$, d'où $x = 1/2(q/m)t^2$; le mouvement de l'ion est uniformément varié d'accélération q/m.
La variation d'énergie cinétique de l'ion initialement au repos, pendant son passage dans la chambre d'accélération, est égale à $q \cdot U$ (on applique le théorème de l'énergie cinétique), soit $12 \cdot 10^3$ eV. L'énergie de masse de l'ion bore est environ 10 fois celle d'un nucléon, soit de l'ordre de 10^4 MeV. Elle est très supérieure à son énergie cinétique, et on pourra utiliser les lois de la mécanique classique pour étudier son mouvement. On obtient :

$$v = \sqrt{\frac{2q \cdot U}{m}}, \quad \text{soit} \quad v_1 = \sqrt{\frac{2q \cdot U}{m_1}} = 4{,}8 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Ce résultat confirme notre hypothèse (voir l'expérience de Bertozzi : pour une valeur de l'énergie cinétique d'une particule, sa vitesse réelle, obtenue par la mécanique relativiste, est toujours inférieure à sa vitesse, de valeur fausse ou approchée, obtenue par la mécanique classique).

b) Des relations : $v_1 = \sqrt{\frac{2q \cdot U}{m_1}}$ et $v_2 = \sqrt{\frac{2q \cdot U}{m_2}}$, on tire : $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$.

2° *a*) Les ions sont soumis à la force électromagnétique $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$. Leur accélération est $\vec{a} = \vec{F}/m = (q/m) \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$. Ce vecteur est perpendiculaire à $\vec{B}$, donc, dans le plan de la figure, et perpendiculaire à $\vec{v}$, donc normal à la trajectoire. La composante tangentielle de l'accélération est donc nulle et,

comme $\|\vec{a}_t\| = \dfrac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|}{\mathrm{d}t} = 0$, la norme de la vitesse est constante et égale à v_0.

La composante normale de $\vec{a}$ a pour norme $\|\vec{a}_n\| = v^2/R$, et comme $\|\vec{a}\| = (q/m)\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| = (q/m) \cdot v_0 \cdot B$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{q}{m} v_0 \cdot B \Rightarrow R = \frac{m \cdot v_0}{q \cdot B}.$$

Pour chaque ion, on a :

$$R_1 = \frac{m_1 \cdot v_1}{q \cdot B} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{m_2 \cdot v_2}{q \cdot B} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}.$$

La distance A_1A_2 est égale à :

$$2R_2 - 2R_1 = 2\left(\frac{m_2 \cdot v_2}{q \cdot B} - \frac{m_1 \cdot v_1}{q \cdot B}\right) = 2\,\frac{m_1 \cdot v_1}{q \cdot B}\left(\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} - 1\right) = A_1A_2 = 3{,}89 \cdot 10^{-2}\ \text{m}.$$

b) On a $n_2/n_1 = 4{,}32$, et, comme n_1 et n_2 sont les proportions des 2 isotopes dans le bore naturel, $n_1 + n_2 = 1$. Ces deux équations donnent :

$$n_1 = 0{,}188 \quad \text{et} \quad n_2 = 0{,}812.$$

La masse atomique de l'isotope ^{10}B étant environ 10 g·mol^{-1} et celle de l'isotope ^{11}B environ 11 g·mol^{-1}, celle du bore naturel est :

$$M = 10 \cdot 0{,}188 + 11 \cdot 0{,}812 = 10{,}8\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

6. **1°** *a*) Le nombre de particules reçues par l'écran de surface $s = 0{,}01$ mm^2 en 1 seconde est : $n' = 37/200$. Le nombre total de particules reçues par la surface S de la sphère de rayon R est : $n = n'(S/s) = n'(4\pi R^2/s) = 1{,}49 \cdot 10^6$. Ceci pour 1/100 mg de radium placé au centre de la sphère. Pour 1 g, on obtiendrait 10^5 fois plus de particules, soit : $N = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ particules par seconde.

b) La charge du condensateur est $Q = C \cdot V = 1{,}43 \cdot 10^{-9}$ C en 30 s, soit, en une seconde, et pour 1 mg de radium : $Q = (1{,}43 \cdot 10^{-9}/30)$ C.
Le nombre de particules émises par 1 mg de radium étant $1{,}49 \cdot 10^8$, la charge d'une particule est :

$$|q| = \frac{1{,}43 \cdot 10^{-9}}{30 \cdot 1{,}49 \cdot 10^8} \simeq 3{,}2 \cdot 10^{-19}, \quad \text{soit} \quad 2|e|.$$

2° *a*) Les particules sont soumises, entre les plaques, à la force $F = q \cdot E$ (leur poids est négligeable devant la force électrique).

$$m \cdot \ddot{y} = q \cdot E \rightarrow \ddot{y} = \frac{q \cdot E}{m} \rightarrow \dot{y} = \frac{q \cdot E}{m}\, t \rightarrow y = \frac{q \cdot E}{2m}\, t^2$$

$$m \cdot \ddot{x} = 0 \rightarrow \ddot{x} = 0 \rightarrow \dot{x} = v_0 \rightarrow x = v_0 \cdot t$$

où $\dot{y}$ et $\ddot{y}$ sont les dérivées première et seconde de y par rapport au temps ($\dot{x}$ et $\ddot{x}$ dérivées de x), v_0 la vitesse initiale d'une particule à son entrée entre les plaques, et l'origine des temps étant choisie à l'instant où la particule passe en O.

En éliminant t entre les deux dernières équations et avec $E = U/d$:

$$y = \frac{q \cdot U \cdot x^2}{2d \cdot m \cdot v_0^2} \rightarrow E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \frac{q \cdot U \cdot x^2}{4 \cdot d \cdot y}.$$

Cherchons les valeurs de x et y en B : $x_B = l$. Pour déterminer y_B, on remarque que $\tan \theta = \mathrm{FE/AF} = \mathrm{CB/AC}$, d'où :

$$\mathrm{CB} = (\mathrm{FE} \cdot \mathrm{AC})/\mathrm{AF} = (\mathrm{FE}) \cdot (l/2D).$$

On remplace alors x_B et y_B par leurs valeurs dans l'expression de E_c :

$$E_c = \frac{q \cdot U \cdot l^2 \cdot 2D}{4 \cdot d(\mathrm{FE})\, l} = \frac{q \cdot U \cdot l \cdot D}{2d(\mathrm{FE})} = 9{,}6 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} = 6\ \mathrm{MeV}.$$

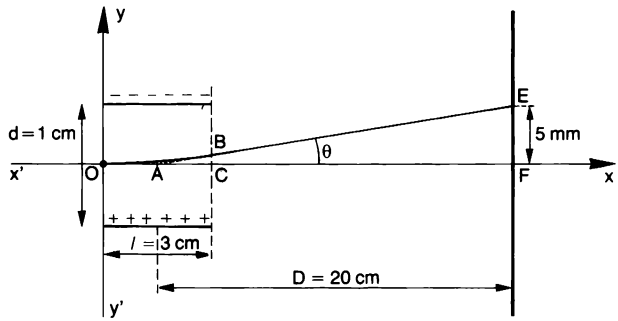


Fig. 3

b) La force qui s'exerce sur une particule est représentée sur la figure. Le rayon de courbure de la trajectoire est $R = m \cdot v/q \cdot B$, v étant la norme de la vitesse d'une particule, constante et égale à v_0 et la charge q est positive. D'autre part, l'angle des tangentes en O et B, θ, est égal à l'angle au centre $\widehat{\mathrm{OO'B}}$. On a alors :

$$\tan \theta = \frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{AF}} \simeq \frac{\mathrm{FE}}{D - l'/2} \simeq 0{,}028 \simeq \theta\,(\mathrm{rad}) \quad \text{et} \quad \theta \simeq \frac{\widehat{\mathrm{OB}}}{R} \simeq \frac{l}{R}; \quad \text{d'où} \quad R \simeq \frac{l}{\theta} = 0{,}89\ \mathrm{m}.$$

En reportant cette valeur dans la relation $R = (m \cdot v)/(q \cdot B)$ on obtient :

$$p = m \cdot v = R \cdot q \cdot B = 1{,}14 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}} = 215\ \mathrm{MeV}/c.$$

3° Résultats :

$E_c = 9{,}6 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} = 6\ \mathrm{MeV}$; $p = 1{,}14 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}} = 215\ \mathrm{MeV}/c$;
$q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$. (On trouve, d'après la figure, $q > 0$.)

Des relations $E_c = 1/2m \cdot v^2$ et $p = m \cdot v$, on tire : $v = 2E_c/p$ et $m = p^2/2E_c$.

D'où : $v = 1{,}68 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $m = 6{,}77 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 4{,}07\ \mathrm{u}$.

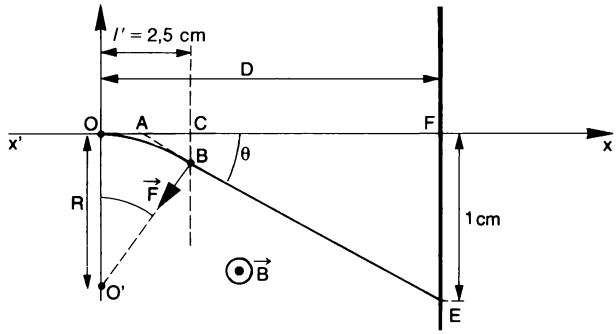


Fig. 4

Avec une précision de 2% sur la détermination de la masse, on reconnaît les particules α, noyaux d'hélium, formées de 2 protons et 2 neutrons.

RÉACTIONS NUCLÉAIRES

24

Au cours d'une réaction nucléaire il y a conservation globale :
— de la charge;
— du nombre de nucléons;
— de l'énergie totale;
— de la quantité de mouvement.

1. Réactions nucléaires spontanées (Radioactivité)

• *Cinétique des réactions spontanées.*
Si à l'instant $t = 0$, un échantillon contient N_0 noyaux d'un élément radioactif, à l'instant t, il en reste : $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ (ou, sous forme différentielle : $dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$). La période ou demi-vie d'un radioélément, T, est le temps au bout duquel la moitié des noyaux initialement présents se sont désintégrés. On a donc la relation :

$$\lambda \cdot T = \text{Log } 2 = 0{,}693.$$

• *Différents types de radioactivité :*
— α : noyaux d'hélium ${}^4_2\text{He}$, très ionisants et peu pénétrants;
— β : électrons ${}^0_{-1}\beta$, et positrons ${}^0_{+1}\beta$ plus pénétrants, accompagnés d'émission de *neutrinos* ou d'*antineutrinos* (charge et masse nulles, vitesse de la lumière);
— γ : rayonnement très pénétrant (photons) accompagnant souvent les réactions nucléaires lorsqu'un noyau excité se désexcite;
— neutrinos : particules de masse nulle, de charge nulle, n'ayant que des interactions faibles.
• *Famille radioactive :* c'est l'ensemble des nucléides qui proviennent d'un même nucléide instable.

2. Réactions nucléaires provoquées

• *Fission :* un neutron lent peut provoquer l'éclatement du noyau d'un atome lourd. Il se forme des atomes plus légers, des neutrons rapides, et le diagramme $A \rightarrow \Delta E$ montre qu'une énergie très supérieure à celle observée en radioactivité naturelle est libérée (réacteurs nucléaires, bombe A).
• *Fusion :* à partir de noyaux légers, des noyaux plus lourds sont formés (origine de l'énergie des étoiles, réacteurs à fusion thermonucléaire, bombe H). L'énergie libérée par unité de masse de combustible nucléaire employé est beaucoup plus grande que celle obtenue par la fission. De plus, la manière première est très répandue dans la nature : l'hydrogène.

EXERCICES

1. On bombarde des noyaux d'aluminium $^{27}_{13}Al$ avec des particules α; il se forme un isotope $^{30}_{15}P$ du phosphore et une particule élémentaire. Quelle est cette particule?

   Réponse : un neutron.

2. Écrire la transformation β^+ du sodium en néon. Interpréter cette réaction comme transformation d'un proton en neutron avec émission d'un neutrino (nécessaire pour assurer la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement).

   Réponse : $^{22}_{11}Na \rightarrow {}^{22}_{10}Ne + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu$.
   On doit écrire : $^{1}_{1}p \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{1}e + {}^{0}_{0}\nu$.

3. Écrire la transformation β^- du strontium $^{90}_{38}Sr$ en yttrium. Interpréter cette réaction comme transformation d'un neutron en proton avec émission d'un antineutrino.

   Réponse : $^{90}_{38}Sr \rightarrow {}^{90}_{39}Y + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$. On écrit : $^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$.
   Remarquer la symétrie particule-antiparticule qui apparaît : électron-antineutrino à comparer au couple précédent : positon (anti-électron), neutrino.

4. A l'instant t, le nombre d'atomes radioactifs d'un échantillon est donné par la relation : $N = N_0 e^{-\lambda \cdot t}$, où $\lambda = 2{,}86 \cdot 10^{-3}\ s^{-1}$. Quelle est la période du nucléide radioactif contenu dans l'échantillon?

   Réponse : $T = \dfrac{0{,}693}{\lambda} = 241$ s.

5. Montrer qu'au bout d'un temps égal à n fois la période, le nombre de noyaux radioactifs d'un solide a été divisé par 2^n.

   Réponse : remarquer que $e^{-\mathrm{Log}\,2} = \dfrac{1}{2}$.

PROBLÈMES

1. Le thorium peut être utilisé pour la fabrication de l'uranium 233, *isotope fissile par neutrons,* donc capable de donner lieu à des *réactions en chaîne.* Un noyau de thorium $^{232}_{90}Th$ est bombardé par un neutron qu'il capte. Le noyau formé après cette capture est dans un *état excité.* Il se désexcite puis, par deux *désintégrations* β^- successives, il est transformé en noyau d'uranium 233. En dehors du fait qu'il est *fissile,* l'uranium 233 est lui-même *radioactif* α, de *période* $T = 162\,000$ ans.
   (L'un des nucléides intermédiaires est le protactinium Pa.)

   1° Écrire toutes les réactions qui se produisent en les justifiant.

   2° Expliquer tous les mots en italique.

2. Le nucléide $^{87}_{35}Br$ est un produit primaire de la fission de l'uranium.
Il est radioactif et peut se désintégrer suivant deux modes différents :

1° *Premier mode :*

$$^{87}_{35}Br \rightarrow {}^{87}_{36}Kr \rightarrow {}^{87}_{37}Rb \rightarrow {}^{87}_{38}Sr \text{ (stable)}.$$

Écrire les trois équations de désintégration. De quel type de radioactivité s'agit-il? Pour quelle raison principale le noyau final est-il plus stable que les précédents?

2° *Deuxième mode :*
Le nucléide $^{87}_{36}Kr$ obtenu après la première désintégration du premier mode, expulse un neutron pour donner immédiatement un nucléide stable. Écrire l'équation de désintégration correspondante.

3. Un nucléide $^{A}_{Z}X$ possédant une radioactivité de type α conduit, par désintégration, au nucléide $^{A_1}_{Z_1}Y$.

1° Écrire l'équation-bilan de cette désintégration.

2° Un nucléide différent, $^{A'}_{Z'}X'$, possédant une radioactivité de type β^- conduit, par désintégration, au nucléide $^{A_1}_{Z_1}Y'$. Écrire l'équation-bilan de cette désintégration.

3° Le radium $^{226}_{88}Ra$ est un élément radioactif qui, par désintégrations successives de type α et β^-, conduit à un isotope stable du plomb $^{206}_{82}Pb$. Déterminer le nombre de désintégrations de type α et celui de type β^-, pour le passage du nucléide $^{226}_{88}Ra$ au nucléide $^{206}_{82}Pb$. (Pour effectuer ce calcul, la connaissance de l'ordre des désintégrations n'est pas nécessaire.)

4. Les premiers nucléides de la famille radioactive de l'uranium sont donnés sur le graphique.

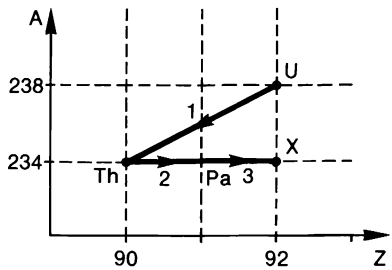


Fig. 1

1° Écrire les équations-bilan des désintégrations 1, 2 et 3.

2° Expliciter brièvement les règles appliquées et préciser le type de radioactivité pour chaque désintégration ainsi que le nom et le symbole du nucléide X.

3° Dans la désintégration 1, on constate que certaines particules émises ont une énergie cinétique initiale de 4,147 MeV et les autres, une énergie de 4,195 MeV. Interpréter ces données, sachant que l'on observe simultanément l'émission d'un rayonnement γ
Calculer sa longueur d'onde, en supposant négligeable l'énergie de recul des noyaux de thorium.

5. Données : masse de l'atome $^{83}_{12}Bi = 211{,}991\,3$ u.
masse du nucléide X formé : 207,983 0 u.
masse de la particule $\alpha = 4{,}001\,5$ u.

A une date origine $t = 0$, on dispose d'un échantillon de N_0 noyaux de $^{210}_{84}Po$ radioactif; à une date t, on détermine le nombre N de noyaux non désintégrés; les mesures donnent :

t jours	0	40	80	120	160	200	240
$\frac{N}{N_0}$	1	0,82	0,67	0,55	0,45	0,37	0,30

1° Par une étude graphique déduire de ces mesures la valeur de la constante radioactive λ et de la période T du polonium $^{210}_{84}Po$. Pour cette étude graphique, on portera $-\text{Log}\, N/N_0$ en ordonnée et t en abscisse avec pour échelle : *ordonnée :* 1 cm pour 0,1; *abscisse :* 1 cm pour 20 jours.

2° Au bout de combien de temps la masse restante de $^{210}_{84}Po$ devient-elle le dixième de la masse initiale?

6. **1°** Lorsque dans la haute atmosphère, un neutron faisant partie du rayonnement cosmique rencontre un noyau d'azote $^{14}_{7}N$, la réaction donne naissance à du carbone $^{14}_{6}C$, isotope radioactif du carbone $^{12}_{6}C$. Écrire le bilan de la réaction; préciser la nature de la particule apparue au second membre avec le carbone $^{14}_{6}C$. Le noyau $^{14}_{6}C$ se désintègre en émettant une particule β^-; écrire le bilan de cette réaction de désintégration.

2° Des végétaux absorbent le dioxyde de carbone de l'atmosphère provenant indifféremment du carbone 14 (de période $T = 5\,570$ ans) et du carbone 12. La proportion de ces deux isotopes est la même dans les végétaux et dans l'atmosphère. Lorsque la plante meurt, elle cesse d'absorber le gaz carbonique, et le carbone 14 qu'elle contient se désintègre sans être renouvelé. Au bout de combien de temps après la mort d'une plante, la quantité de carbone 14 qu'elle contenait lors de sa mort aura-t-elle diminué de moitié?

3° Application : on compare l'émission β^- d'un spécimen de bois trouvé dans une tombe égyptienne et celle d'un spécimen analogue, encore vivant, contenant la même quantité de carbone. Le rapport des indications du compteur est $r = 0{,}56$. Sachant que l'indication du compteur de particules β^- est proportionnelle au nombre des noyaux qui se désintègrent en un temps donné, calculer l'âge du spécimen égyptien.

7. Un proton animé d'une vitesse $\vec{V}$ entre en collision avec un noyau de lithium $^{7}_{3}Li$ au repos. Il y a formation de deux particules α ayant deux vitesses de même norme $\|\vec{V}'\|$ telle que $\|\vec{V}'\| \ll c$.

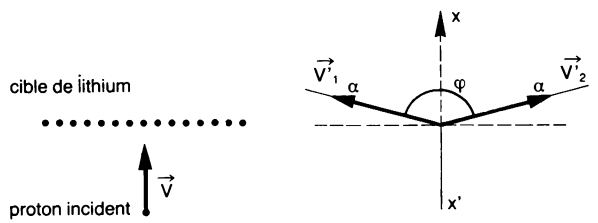


Fig. 2

Les trajectoires des deux particules α produites font avec le prolongement de la trajectoire du proton incident un angle $\varphi = 80°$.

1° Écrire l'équation nucléaire bilan de cette transmutation.

2° Quelle est la relation entre les normes des vitesses $\vec{V}$ et $\vec{V}'$, l'angle φ et les masses m du noyau d'hydrogène et m' de chacune des particules α?

3° Montrer que cette relation implique que l'énergie cinétique des particules est plus grande après l'interaction qu'avant. Interpréter cette variation de l'énergie cinétique.

4° La vitesse V du proton incident étant $2{,}00 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, déterminer la vitesse V'.

RÉPONSES

1. **1°** $^{232}_{90}\mathrm{Th} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{233}_{90}\mathrm{Th}^{*} \xrightarrow{\text{désexcitation}} {}^{233}_{90}\mathrm{Th} + \gamma$; $^{233}_{90}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{233}_{91}\mathrm{Pa} + {}^{0}_{-1}e$;
$^{233}_{91}\mathrm{Pa} \rightarrow {}^{233}_{92}\mathrm{U} + {}^{0}_{-1}e$; $^{233}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{229}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\alpha$.

2° Pour la deuxième question, voir le cours.

2. **1°** $^{87}_{35}\mathrm{Br} \rightarrow {}^{87}_{36}\mathrm{Kr} + {}^{0}_{-1}\beta^{-}$ (1); $^{87}_{36}\mathrm{Kr} \rightarrow {}^{87}_{37}\mathrm{Rb} + {}^{0}_{-1}\beta^{-}$ (2).
$^{87}_{37}\mathrm{Rb} \rightarrow {}^{87}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{0}_{-1}\beta^{-}$: radioactivité β^{-} (3).
La différence entre nombre de protons et nombre de neutrons est plus faible.

2° $^{87}_{36}\mathrm{Kr} \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{86}_{36}\mathrm{X}$ (Kr).

3. **1°** $^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{(A-4)}_{(Z-2)}\mathrm{Y}$.

2° $^{A'}_{Z'}\mathrm{X}' \rightarrow {}^{0}_{-1}\beta + {}^{A'}_{(Z'+1)}\mathrm{Y}'$.

3° Pour le passage du nucléide $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ au nucléide $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$, le nombre de masse varie de 20, correspondant à l'émission de 5 particules α.
Il devrait donc y avoir une diminution du nombre de charge de $5 \cdot 2 = 10$ or, ΔZ est égal à -6. Il y a donc 4 électrons émis au cours de l'ensemble de ces désintégrations.

4. **1°** (1) $^{238}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\alpha$

(2) $^{234}_{92}\mathrm{Th} \longrightarrow {}^{234}_{91}\mathrm{Pa} + {}^{0}_{1}\beta$

(3) $^{234}_{91}\mathrm{Pa} \longrightarrow {}^{234}_{92}\mathrm{X} + {}^{0}_{-1}\beta$.

2° Voir cours; X est l'élément uranium (92 protons).

3° L'émission de particules d'énergie cinétique 4,147 MeV est accompagnée d'un rayonnement γ, celle des particule d'énergie cinétique 4,195 MeV ne l'est pas. L'énergie d'une particule γ est donc :

$$E = 4{,}195 - 4{,}147 = 0{,}048 \text{ MeV}.$$

Comme $E = h \cdot \nu = h \cdot \dfrac{c}{\lambda}$, $\lambda = \dfrac{h \cdot c}{E} = \dfrac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{0{,}048 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}} = 2{,}59 \cdot 10^{-11}$ m.

5. 1° Le graphe de la fonction $t \to -\text{Log}\, N/N_0$ est une droite, de taux d'accroissement a, dont on peut écrire l'équation :

$$-\text{Log}\,\frac{N}{N_0} = a \cdot t, \quad \text{soit} \quad N = N_0 \cdot e^{-a \cdot t}.$$

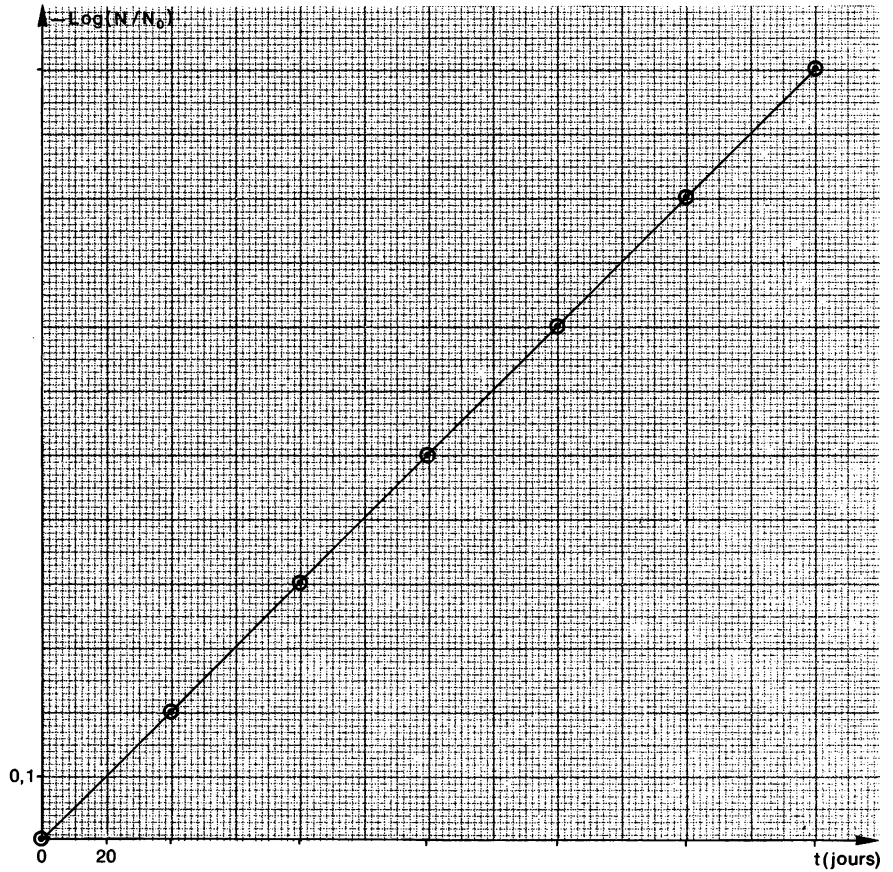
Par comparaison de cette relation avec la loi de décroissance d'un nucléide, on obtient : $a = \lambda$.
On a donc :

$$\lambda = \frac{\Delta\left(-\text{Log}(N/N_0)\right)}{\Delta t} = \frac{1}{200 \cdot 24 \cdot 3\,600} = 5{,}79 \cdot 10^{-8}\ \text{s}^{-1}.$$

La période est T telle que : $\lambda \cdot T = \text{Log}\, 2$

soit, $$T = \frac{0{,}69}{5{,}79 \cdot 10^{-8}} = 1{,}19 \cdot 10^{7}\ \text{s} \simeq 137\ \text{jours}.$$

Fig. 3



2° $N/N_0 = 1/10$; or $N/N_0 = e^{-\lambda \cdot t} \to \lambda t = \text{Log}\, 10$ et :

$$t = \frac{\text{Log}\, 10}{\lambda} = 3{,}98 \cdot 10^{7}\ \text{s} \simeq 460\ \text{jours}.$$

6. **1°** ${}_0^1n + {}_7^{14}N \rightarrow {}_6^{14}C + {}_1^1p$ (proton); ${}_6^{14}C \rightarrow {}_7^{14}N + {}_{-1}^{0}\beta$ (électron).

2° Après la durée d'une période, soit 5 570 ans.

3° Si N_0 est le nombre d'atomes de carbone contenu dans la plante au moment de sa mort, le nombre N d'atomes de carbone restant au bout du temps t est donné par la relation :

$$N = N_0 e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow N = N_0 e^{-\frac{0,693}{T} t}.$$

Le rapport des indications du compteur étant 0,56, on a : $N(t) = 0,56 N_0$, d'où :

$$N(t) = 0,56 N_0 = N_0 \cdot e^{-\frac{0,693}{T} t} \Rightarrow \text{Log}(0,56) = -\frac{0,693}{5\,570} t \rightarrow t \simeq 4\,660 \text{ ans}.$$

7. **1°** ${}_1^1H + {}_3^7Li \rightarrow 2\ {}_2^4He$; masses m(H), M(Li) et m'(He).

2° La quantité de mouvement de l'ensemble des particules se conserve :

$$m \cdot \vec{V} = m' \cdot \vec{V}'_1 + m' \cdot \vec{V}'_2.$$

Posons $\| \vec{V}'_1 \| = \| \vec{V}'_2 \| = V'$.

Par projection de la relation sur l'axe $\overrightarrow{X'X}$, il vient :

$$m \cdot V = 2m' \cdot V' \cdot \cos \varphi.$$

3° Soit E_c et E'_c les énergies cinétiques des particules avant et après le choc :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{proton :} & E_c = (1/2)\, m \cdot V^2 \\ \text{particules } \alpha : & E'_c = m' \cdot V'^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E_c}{E'_c} = \frac{m \cdot V^2}{2m' \cdot V'^2}.$$

Comparons à la relation trouvée au **2°** :

$$\frac{V}{V'} = \frac{2m'}{m} \cos \varphi, \text{ alors : } \frac{E_c}{E'_c} = 2 \frac{m'}{m} \cos \varphi = 0,24 \quad (m'/m \sim 4/1).$$

Il semble que de l'énergie cinétique soit apparue : la masse du système a donc diminuée de $(E'_c - E_c)/c^2$.

4° La relation trouvée au **2°** permet d'écrire :

$$V' = \frac{m}{2m'} V \cdot \cos \varphi \simeq 1,44 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \left(\frac{V'}{c} \simeq 5\ \% \ll 1\right).$$

I.M.E. - 25-Baume-les-Dames - Dépôt légal Septembre 1984 - N° éditeur 8742

COLLECTION
Flash BAC

Les épreuves du baccalauréat

- Pour préparation intensive à l'examen
- Pour révision rapide
- exercices et problèmes corrigés
- tous les types de sujets développés

MATHÉMATIQUES

A 1 Mathématiques
B Mathématiques
C et E tome 1 Analyse et statistiques
C et E tome 2 Algèbre et géométrie
D tome 1 Analyse
D tome 2 Algèbre, probabilités, statistiques

PHYSIQUE ET CHIMIE

C et E tome 1 Mécanique, électromagnétisme (éd. 1984)
C et E tome 2 Vibrations, ondes, physique des particules (éd. 1984)
D Physique (ed. 1984)
C.D.E. Chimie (éd. 1984)

BIOLOGIE

C Biologie
D tome 1 Biologie cellulaire, génétique
D tome 2 Corrélations, immunité, évolution

PHILOSOPHIE

L'épreuve écrite de philosophie

HISTOIRE ET GÉOGRAPHIE

L'épreuve écrite d'histoire (éd. 1984)
L'épreuve écrite de géographie

ANGLAIS

L'épreuve orale d'anglais (avec cassette)
L'épreuve écrite d'anglais au bac.

E 0136 2-200-07632-0